

## OPTIMASI PADA MISIL MENGGUNAKAN BANG-SINGULAR-BANG CONTROL

Ahmad Zaenal Arifin<sup>1</sup>

<sup>1)</sup>Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas PGRI Ronggolawe Tuban (Unirow)  
Jl. Manunggal 61, Tuban  
Email: kuyafira@gmail.com

### ABSTRAK

*Misil atau peluru kendali merupakan salah satu contoh dari wahana nir awak(WANA) yang berupa senjata roket militer yang bisa dikendalikan atau memiliki sistem pengendali otomatis untuk mencapai target atau menyesuaikan arah. Kemampuan WANA yang bisa dikendalikan ini sangat menguntungkan bagi manusia terutama dibidang pertahanan negara. Permasalahan pada misil ini adalah tentang optimasi untuk mengendalikan gerak misil dan estimasi posisi misil untuk mengatur keberadaan misil agar tetap mengarah pada target. Variabel yang dikendalikan adalah daya dorong dengan menggunakan kendali Bang-bang dan yang diestimasi adalah lintasan misil dengan menggunakan metode Ensamble Kalman Filter(EnKF). untuk bisa mengarah pada target. Hasil yang diperoleh dengan menggunakan kedua metode ini adalah estimasi mendekati kondisi real karena memiliki Root Means Square(RMS) sangat kecil.*

Kata Kunci: Misil, Optimasi, Estimasi, kendali bang-bang, EnKF.

### 1. PENDAHULUAN

Misil atau peluru kendali adalah senjata roket militer yang bisa dikendalikan atau memiliki sistem pengendali otomatis untuk mencari target atau menyesuaikan arah. Misil adalah salah satu contoh dari wahana nir awak (WANA) yang banyak digunakan baik untuk kepentingan militer. Kemampuan WANA yang bisa dikendalikan dari jarak jauh atau bahkan bisa diprogram untuk terbang sendiri dengan lintasan tertentu tentu sangat menguntungkan bagi manusia. Keuntungan yang bisa didapat antara lain biaya akan lebih efisien dan meminimalisasi resiko bagi manusia.[9]

Kemajuan dalam dunia militer, sistem navigasi yang berbasis GPS, dan teknik kendali penerbangan telah digunakan pada misil dalam militer. Untuk ke depannya, misil akan lebih otonom dari pada misil saat ini yang masih dikendalikan dari jarak jauh. Salah satu teknologi yang mulai dikembangkan saat ini adalah optimasi pada gerakan misil dan perencanaan lintasan dengan estimasi posisi. Sebuah algoritma dari perencanaan lintasan akan menghasilkan satu atau lebih lintasan yang aman untuk misil. Lintasan tersebut harus merupakan panjang minimal dan terlepas dari segala kendala yang menghalangi. Karena misil memiliki kemampuan yang terbatas, maka waktu yang dibutuhkan untuk melakukan terbang juga harus dikurangi, sehingga panjang lintasan sangat mempengaruhi dalam pembuatan algoritma. Selain itu, lintasan harus bisa diikuti oleh misil.[3]

Lintasan misil dari permukaan-ke-permukaan (*surface-to-surface missile*) dengan manuver akhir menghunjam vertikal terbagi menjadi 3 sub-interval, yaitu: tahap terbang bebas, menanjak dan

meminimumkan waktu terbang sehingga dapat mencapai target

Permasalahan pada misil adalah keterbatasan persediaan bahan bakar misil selama terbang. Hal ini dapat diatasi dengan meminimumkan waktu terbang. Sedangkan masalah yang kedua adalah mengestimasi posisi dari misil. Keduanya sangat penting dalam misil. Ada banyak metode Kalman filter yang digunakan untuk mengestimasi posisi suatu gerak benda pada suatu lintasan (navigasi) antara lain dengan menggunakan, *Extended Kalman filter (EKF)*, *Unscented Kalman filter (UKF)*, dan *Ensemble Kalman Filter (EnKF)*. EnKF merupakan pengembangan dari Kalman Filter yang ditemukan oleh R.E. Kalman (1960), ilmuwan yang telah mempublikasikan penelitiannya tentang solusi rekursif dari masalah filtering linear dengan data diskrit. Solusi rekursif yang menggunakan teknik asimilasi data ini kemudian dikenal dengan istilah Kalman Filter. Algoritma Kalman Filter memberikan inspirasi bagi peneliti lain untuk membahas pengembangan beserta aplikasinya, terutama dalam masalah navigasi.

Pada paper ini dipaparkan pengendalian optimal dilakukan pada daya dorong, sudut serang untuk mendapatkan waktu tempuh optimum, dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin. Sedangkan pada estimasi posisi misil berdasarkan lintasan yang telah dibuat sehingga apabila dalam perjalanan melewati lintasan terdapat gangguan atau *error* maka misil tersebut bisa menghindarinya untuk kemudian kembali pada lintasan yang telah didisain agar bisa menuju target yang telah ditentukan.

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Model dinamik misil

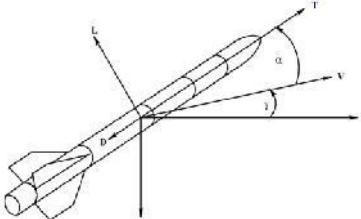
Sistem dinamik dari titik pusat massa peluru kendali yang bergerak diberikan sebagai berikut[5]

$$\dot{\gamma} = \frac{T \sin \alpha}{mV} + \frac{L}{mV} \cos \alpha - \frac{g \cos \gamma}{V} \quad (1)$$

$$\dot{V} = \frac{T \cos \alpha - D}{m} - \frac{L}{m} \sin \alpha - g \sin \gamma \quad (2)$$

$$\dot{x} = V \cos \gamma \quad (3)$$

$$h = V \sin \gamma$$



Gambar 2.1 Model gaya pada misil.[5]

dengan

$$t = \text{waktu}, t_0 \leq t \leq t_f$$

$$t_0 = \text{waktu awal}$$

$$t_f = \text{waktu akhir}$$

$$\gamma = \text{sudut penerbangan}$$

$$V = \text{kecepatan}$$

$$x = \text{posisi horizontal}$$

$$h = \text{ketinggian}$$

$$T = \text{gaya dorong}$$

$$\alpha = \text{sudut tembak}$$

$T$  dan  $\alpha$  adalah dua variabel kontrol (lihat Gambar 2.1).

Gaya aerodinamik  $D$  dan  $L$  adalah fungsi – fungsi dari ketinggian  $h$ , kelajuan  $V$ , dan sudut tembak  $\alpha$

Gaya aerodinamik:

$$D(h, V, \alpha) = \frac{1}{2} C_d \rho V^2 S_{ref} \quad (5)$$

$$C_d = A_1 \alpha^2 + A_2 \alpha + A_3 \quad (6)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho h v^2 S C_L \alpha \quad (7)$$

$$C_L = B_1 \alpha + B_2$$

dengan  $\rho$  adalah densitas udara yang diberikan oleh

$$\rho = C_1 h^2 + C_2 h + C_3 \quad (8)$$

$S_{ref}$  = daerah yang digunakan oleh misil

$m$  = massa

$g$  = konstanta gravitasi

Nilai  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , dan  $C_3$  adalah konstanta seperti yang ditunjukkan pada Tabel 2.1.1.

#### Syarat batas

Syarat awal dan akhir untuk keempat variabel state adalah sebagai berikut:

$$\gamma(0) = \gamma_0, \quad \gamma(t_f) = \gamma_{t_f} \quad (10a)$$

$$V(0) = V_0, \quad V(t_f) = V_{t_f} \quad (10b)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_{t_f} \quad (10c)$$

$$h(0) = h_0, \quad h(t_f) = h_{t_f} \quad (10d)$$

Tabel 2.1 Parameter fisik model[5]

Kuantitas	Nilai	Satuan
$G$	9.81	$m/s^2$
$A_1$	-1.9431	
$A_2$	-0.1499	
$A_3$	0.2359	
$B_1$	21.9	
$B_2$	0	
$C_1$	$3.312 \cdot 10^{-9}$	$kg/m^2$
$C_2$	$1.142 \cdot 10^{-4}$	$kg/m^2$
$C_3$	1.224	$kg/m^2$

Dengan kendala didefinisikan sebagai berikut:

$$V_{min} \leq V \leq V_{max} \quad (11a)$$

$$h_{min} \leq h \leq h_{max} \quad (11b)$$

$$T_{min} \leq T \leq T_{max} \quad (11c)$$

$$L_{min} \leq \frac{L}{mg} \leq L_{max} \quad (11d)$$

di mana  $L_{min}$  dan  $L_{max}$  adalah normal, sebagaimana terlihat pada Tabel 2.2

Tabel 2.2 Syarat Batas dan Kendala

Kuantitas	Nilai	Satuan
$V_{min t_f}$	250	$m/s$
$V_{min}$	200	$m/s$
$V_{max}$	310	$m/s$
$T_{min}$	1000	$N$
$T_{max}$	6000	$N$
$h_{min}$	30	$M$
$L_{min}$	-4	$G$
$L_{max}$	4	$G$

### 2.2 Teori Pengendalian Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari pengendali optimal adalah menentukan signal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik (model) dan memenuhi beberapa konstrain, dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan ( $J$ ) yang sesuai [7]

Formulasi masalah kendali optimal diberikan sebagai berikut. Misalkan suatu kendali dari sistem dinamik yang diberikan oleh persamaan

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Dengan keadaan awal  $x(t_0) = x_0$  dan kondisi akhir  $x(t_f) = x_f$  dan  $u(t)$  menyatakan pengontrol keadaan pada waktu  $t$ . Dalam hal ini masalah kendali optimal adalah mencari pengontrol optimal  $u^*$  yang memenuhi persamaan kendali dengan syarat nilai  $J$  yang berikut ini

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t) dt$$

Berikut ini diberikan satu cara dalam menyelesaikan masalah kendali optimal yang diformulasikan sebelumnya dengan menggunakan persamaan Hamiltonian yang disebut prinsip Pontryagin. Langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut[7]

- i. Bentuk Hamiltonian, yaitu  

$$H(x, u, \lambda, t) = g(x, u, t) + \lambda f(x, u, t)$$
- ii. Selesaikan persamaan kendali

$$\frac{\partial}{\partial u} H(x, u, \lambda, t) = 0$$

untuk memperoleh  $u^* = u^*(x, \lambda, t)$

- iii. Dapatkan Hamiltonian

$$H^*(x, \lambda, t) = H(x, u^*, \lambda, t)$$

- iv. Selesaikan 2n persamaan

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} H^*(x, \lambda, t)$$

dan Persamaan ko-state :

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H^*(x, \lambda, t)$$

dengan kondisi batas diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir.

- v. Substitusikan hasil-hasil dari langkah (iv) kedalam persamaan  $u^*$  untuk memperoleh kendali optimal yang dicari.

### 2.3 Metode Kalman Filter

Metode Kalman Filter (KF) secara umum digunakan untuk mengestimasi variabel state  $x_k \in \mathbb{R}^n$  dari sistem dinamik stokastik linear [1][2]

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \quad (12)$$

dengan pengukuran  $z_k \in \mathbb{R}^p$  yang memenuhi

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (13)$$

untuk  $z_k \in \mathbb{R}^p$  adalah variabel input yang diberikan secara deterministik. Variabel  $w_k \in \mathbb{R}^l$  dan  $v_k \in \mathbb{R}^p$  masing-masing menyatakan noise sistem dan noise pengukuran. Kedua variabel ini diasumsikan *white*, tidak berkorelasi satu sama lain maupun dengan nilai estimasi awal  $\bar{x}_0$ , dan mempunyai distribusi peluang normal. Jika variansi dari  $w_k$  adalah  $Q_k$  dan variansi dari  $v_k$  adalah  $R_k$ , maka dipenuhi  $\overline{w}_k = 0$ ,  $\overline{v}_k = 0$ ,  $\overline{w_k w_k^T} = Q_k$ , dan  $\overline{v_k v_k^T} = R_k$ . Dalam hal ini simbol garis di atas (*overbar*) menunjuk pada pengertian nilai ekspektasi atau mean dari suatu variabel random. Dengan demikian, dapat dituliskan  $w_k \sim N(0, Q_k)$  dan  $v_k \sim N(0, R_k)$ .

Di dalam [4] telah disebutkan bahwa efek sistem dinamik terhadap nilai mean dan kovariansi dari  $x_k$  dan  $z_k$ . Untuk mean dari state  $x_k$ , dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= \overline{A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k} \\ &= A_k \bar{x}_k + B_k \bar{u}_k + G_k \bar{w}_k \end{aligned}$$

Karena noise proses  $w_k$  adalah *white*, maka dipenuhi  $\overline{w}_k = 0$ . Sedangkan,  $u_k$  adalah variabel input yang deterministik, sehingga berlaku  $\bar{u}_k = u_k$ . Oleh karena itu, didapat

$$\bar{x}_{k+1} = A_k \bar{x}_k + B_k u_k \quad (14)$$

Bentuk  $\bar{x}_{k+1}$  pada persamaan (14) sekaligus juga menggambarkan nilai dari variabel estimasi  $\hat{x}_{k+1}$ .

Untuk menentukan kovariansi dari state  $x_{k+1}$ , dapat dituliskan

$$P_{x_{k+1}} = \overline{(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^T}$$

$$= [A_k(x_k - \bar{x}_k) + G_k w_k][A_k(x_k - \bar{x}_k) + G_k w_k]^T.$$

Bentuk terakhir ini identik dengan

$$\begin{aligned} A_k(x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^T A_k^T + G_k w_k (x_k - \bar{x}_k)^T A_k^T \\ + A_k (x_k - \bar{x}_k) w^T G_k^T \\ + G_k w_k w^T G_k^T \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P_{x_{k+1}} &= A_k P_{x_k} A_k^T + G_k P_{x_k w_k} A_k^T + \\ &A_k P_{x_k w_k} G_k^T + G_k Q_k G_k^T. \end{aligned}$$

Dengan mengingat bahwa  $x_k$  dan  $w_k$  tidak berkorelasi (yaitu berarti  $P_{w_k x_k} = P_{x_k w_k} = 0$ ), maka didapat

$$P_{x_{k+1}} = A_k P_{x_k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (15)$$

Dalam hal ini juga telah disebutkan bahwa nilai kovariansi dari state  $x_k$  sama dengan nilai kovariansi errornya [4]. Dengan demikian, persamaan (15) sekaligus juga menunjukkan nilai dari kovariansi error state  $x_k$ .

$$\bar{z}_k = \overline{H_k x_k + v_k} = H_k \bar{x}_k + \bar{v}_k$$

Karena  $v_k$  adalah *white*, maka didapat

$$\bar{z}_k = H_k \bar{x}_k \quad (16)$$

Sedangkan kovariansi dari pengukuran

$$P_{z_k} = \overline{(z_k - \bar{z}_k)(z_k - \bar{z}_k)^T}$$

$$= [H_k(x_k - \bar{x}_k) + v_k][H_k(x_k - \bar{x}_k) + v_k]^T$$

Dengan mengingat asumsi bahwa  $x_k$  dan  $v_k$  tidak berkorelasi, maka didapat

$$P_{z_k} = H_k P_{x_k} H_k^T + R_k \quad (17)$$

Sedangkan, kovariansi antara state  $x_k$  dan output  $z_k$  adalah

$$\begin{aligned} P_{x_k z_k} &= \overline{(x_k - \bar{x}_k)(z_k - \bar{z}_k)^T} \\ &= \overline{(x_k - \bar{x}_k)[H_k(x_k - \bar{x}_k) + v_k]^T} \end{aligned}$$

yaitu didapatkan

$$P_{x_k z_k} = P_{x_k} + H_k^T \quad (18)$$

Dari persamaan (16) – (17) dapat disimpulkan bahwa distribusi variabel random gabungan  $x_k$  dan  $z_k$  adalah

$$\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} \sim \left( \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{z}_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{x_k} & P_{x_k z_k} \\ P_{z_k x_k} & P_{z_k} \end{bmatrix} \right)$$

atau

$$\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} \sim \left( \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ H_k \bar{x}_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{x_k} & P_{x_k} H_k^T \\ H_k P_{x_k} & H_k P_{x_k} H_k^T + R_k \end{bmatrix} \right) \quad (19)$$

Di bagian lain [3] juga disebutkan bahwa estimator linear terbaik untuk variabel random  $x_k$  jika diberikan  $\bar{x}_k$ ,  $P_{x_k}$ , dan pengukuran  $z_k$  adalah

$$P_{\tilde{x}_k} = (P_{x_k}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} \quad (20)$$

$$\tilde{x}_k = \bar{x}_k + P_{\tilde{x}_k} H_k^T R_k^{-1} (z_k - H_k \bar{x}_k) \quad (21)$$

Dengan  $\tilde{x}_k$  menyatakan estimasi untuk  $x_k$  dan  $\tilde{x}_k = (x_k - \tilde{x}_k)$  adalah error estimasinya.

Proses estimasi dengan menggunakan Kalman Filter terbagi dalam dua tahap, yaitu tahap *time update* dan tahap *measurement update*. Tahap *time update* (atau tahap prediksi) dipengaruhi oleh dinamika sistem; sedangkan tahap *measurement update* (atau tahap koreksi) dipengaruhi oleh adanya informasi tambahan berupa pengukuran. Pada tahap *time update* didefinisikan

estimasi state  $\hat{x}_k^- \in \Re^n$  yang sering disebut variabel *priori state estimate*; sedangkan estimasi state  $\hat{x}_k \in \Re^n$  (yang disebut juga *posteriori state estimate*) didefinisikan pada tahap *measurement update*. Dari persamaan (14), (15), (20), dan (21) dapat diturunkan suatu algoritma Kalman Filter untuk mengestimasi variabel state  $\hat{x}_k$  sebagaimana diringkaskan pada Tabel 2.3. Untuk time step  $k = 0$ , diperlukan nilai state awal  $\bar{x}_k$  dan kovariansi error  $P_{x_k}$  yang menggambarkan tingkat kepercayaan terhadap nilai estimasi state awal.

Nilai estimasi tahap measurement update bergantung pada *residual* atau *measurement innovation*  $\tilde{z}_k = (z_k - H_k \bar{x}_k)$ . Koefisien pembobotan dari residual tersebut seringkali disebut *Kalman Gain*, yaitu

$$K_k = P_k H_k^T R_k^{-1}$$

Jika terjadi kasus  $\det(P_{k+1}^-) = 0$ , maka nilai  $(P_{k+1}^-)^{-1}$  pada tahap measurement update di Tabel 2.2.1 tidak dapat ditentukan. Oleh karena itu [3] juga telah menyebutkan bentuk alternatif dari tahap measurement update dengan melibatkan pengertian Kalman gain, yaitu

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^- & (2.2.12) \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-) \end{aligned} \quad (22)$$

Bentuk alternatif ini lebih menguntungkan dari segi komputasi karena hanya memuat satu proses menginverskan matriks ukuran  $p \times p$ . Sedangkan bentuk sebelumnya pada Tabel 2.2 memuat dua proses menginverskan matriks ukuran  $n \times n$ , yang mana biasanya ukuran  $n$  lebih besar dari  $p$ .

**Tabel 2.3 Algoritma Kalman Filter (KF)**

**Model sistem dan model pengukuran**

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k$$

$$z_k = H_k x_k + v_k$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, Q_0), w_k \sim N(0, Q_k), v_k \sim N(0, R_k)$$

**Inisialisasi**

$$P_0 = P_{x_0}, \text{ dan } \hat{x}_0 = \bar{x}_0$$

**Tahap time update:**

$$\text{Kovariansi error: } P_{k+1}^- = A_k P_k A_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

$$\text{Estimasi: } \hat{x}_{k+1}^- = A_k \hat{x}_k + B_k u_k$$

**Tahap measurement update:**

**Kovariansi error:**

$$P_{k+1} = [(P_{k+1}^-)^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}]^{-1}$$

**Estimasi:**

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-)$$

## 2.2 Metode Ensamble Kalman Filter

Metode Ensemble Kalman filter (EnKF) pertama kali dikembangkan oleh G. Evensen (1992-1993) pada saat mencoba mengimplementasikan metode EKF untuk asimilasi data pada suatu model. Metode *Linearised Kalman filter* (LKF) secara komputasi lebih menguntungkan daripada EKF. Namun proses linearisi ternyata menyebabkan kovariansi errornya membesar menuju tak hingga

[5]. Selanjutnya G. Evensen memperkenalkan ide penggunaan sejumlah ensemble untuk mengestimasi kovariansi error pada tahap forecasting pada masalah yang sama. Bersama Burgers dan van Leeuwen (1998), Evensen merumuskan skema analisis dalam metode yang dinamakan Ensemble Kalman Filter (EnKF). Dalam hal ini telah ditunjukkan adanya korespondensi yang unik antara statistika error dalam EnKF dan dalam Kalman Filter standar [3][6].

Metode EnKF dijalankan dengan membangkitkan sejumlah ensemble yang merupakan representasi dari variabel state. Ensemble tersebut mempunyai mean sesuai dengan tebakan awal, misalkan  $\bar{x}_0$ . Berdasarkan eksperimen, pada umumnya jumlah anggota ensemble yang mencukupi adalah  $100 - 500$  [3].

Misalkan diberikan model stokastik nonlinear

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad (23)$$

dan pengukuran linear  $z_k \in \Re^p$  yang memenuhi

$$z_k = H x_k + v_k. \quad (24)$$

Misalkan dibangkitkan sejumlah  $N_\varepsilon$  ensemble dari realisasi model pada time step ke- $k$ , yaitu

$$[x_{k,1} x_{k,2} x_{k,3} \dots x_{k,N_\varepsilon}]$$

Maka dari ensemble yang telah dibangkitkan diperoleh nilai mean  $\hat{x}_k^*$  dan kovariansi error  $P_k^*$ , yaitu

$$\hat{x}_k^* = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} x_{k,i} \quad (25)$$

dan

$$P_k^* = \frac{1}{N_\varepsilon - 1} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (x_{k,i} - \hat{x}_k^*)(x_{k,i} - \hat{x}_k^*)^T \quad (26)$$

Bentuk formula pada persamaan (5) akan digunakan untuk menghitung nilai estimasi  $\hat{x}_k^-$  pada tahap time update maupun  $\hat{x}_k$  pada tahap measurement update dalam algoritma EnKF. Sedangkan bentuk formula (26) digunakan untuk menghitung kovariansi error  $P_k^-$  pada tahap time update. Algoritma EnKF selengkapnya untuk mengestimasi penyelesaian model (23) dan (24) dapat dilihat pada Tabel 2.4.

Dalam hal ini perlu diperhatikan bahwa algoritma EnKF tidak membutuhkan nilai awal kovariansi error. Sedangkan nilai awal  $\hat{x}_0$  dihitung dari nilai rata-rata ensemble  $\hat{x}_{0,i}$  yang dibangkitkan pada tahap inisialisasi. Demikian juga, noise sistem  $w_{k,i}$  pada tahap time update dan noise pengukuran  $v_{k,i}$  pada tahap measurement update dibangkitkan dalam bentuk ensemble.

**Tabel 2.4 Algoritma Ensemble Kalman Filter (EnKF)**

**Model sistem dan model pengukuran**

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k$$

$$z_k = H x_k + v_k$$

$$w_k \sim N(0, Q_k), v_k \sim N(0, R_k)$$

**Inisialisasi**

- Bangkitkan  $N_\varepsilon$  ensemble sesuai dengan tebakan awal  $\bar{x}_0$

$$[x_{k,1} x_{k,2} x_{k,3} \dots x_{k,N_\varepsilon}]$$

- Tentukan nilai awal:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^* = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} x_{0,i}$$

**Tahap time update:**

$$\hat{x}_{k,i}^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k,i}$$

dengan  $w_{k,i} \sim N(0, Q_k)$

- **Estimasi:**  $\hat{x}_k^- = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \hat{x}_{k,i}^-$

- **Kovariansi error:**

$$P_k^- = \frac{1}{N_\varepsilon - 1} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^T$$

**Tahap measurement update:**

$$z_{k,i} = z_k + v_{k,i} \quad \text{dengan } v_{k,i} \sim N(0, R_k)$$

- **Kalman gain:**  $K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R_k)^{-1}$

- **Estimasi:**  $\hat{x}_{k,i} = \hat{x}_{k,i}^- + K_k(z_{k,i} - H \hat{x}_{k,i}^-)$

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \hat{x}_{k,i}$$

- **Kovariansi error:**  $P_k = [I - K_k H] P_k^-$

### 3. PEMBAHASAN

#### 3.1 Penyelesaian Pengendalian Optimal

Fungsi tujuan dari permasalahan ini adalah  $J = \int_{t_0}^{t_f} dt$ , dengan  $t$  adalah waktu dan  $t_0 \leq t \leq t_f$  dengan  $t_0$  adalah waktu awal dan  $t_f$  waktu akhir. Bentuk fungsi Hamiltonian dari permasalahan ini adalah  $H = f + \lambda' \dot{x}$  sehingga diperoleh

$$H = 1 + \lambda_v \left( \frac{T \cos \alpha - D}{m} - \frac{L}{m} \sin \alpha - g \sin \gamma \right) + \lambda_y \left( \frac{T \sin \alpha}{mv} + \frac{L}{mv} \cos \alpha - \frac{g \cos \gamma}{v} \right) + \lambda_x (v \cos \gamma) + \lambda_h (v \sin \gamma) \quad (27)$$

(27)

1. Mendapatkan kondisi stasioner

Dapat dituliskan dengan  $\frac{\partial H}{\partial u}$  dengan  $u = [T \alpha]'$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} &= \frac{\lambda_v}{m} \cos \alpha + \frac{\lambda_y}{mv} \sin \alpha = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= \\ -\frac{\lambda_v}{m} \left( (T \sin \alpha + \frac{1}{2} \rho v^2 S (2B_1 + B_2) \alpha \sin \alpha + \right. &+ \\ \left. (B_1 \alpha + B_2) \alpha \cos \alpha \right) \alpha + \frac{\lambda_y}{mv} \left( (T \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho v^2 S \{(2B_1 \alpha + \right. &+ \\ \left. B_2) \cos \alpha - \sin \alpha (B_1 \alpha^2 + B_2 \alpha\} = 0 \quad (28) \right. \end{aligned}$$

2. Mendapatkan co-state

Persamaan co-state diperoleh dengan  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$  dengan  $X = [v \gamma x h]'$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_y &= - \left( -\lambda_v g \cos \gamma - \frac{\lambda_y g}{v} \cos \gamma \right. \\ &\quad \left. - \lambda_x \sin \gamma + \lambda_h \cos \gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_v &= - \left( \left( \frac{\lambda_y}{mv^2} (T \sin \alpha + \rho v S C_d) \right) \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{v^2} \sin \gamma + \lambda_x \cos \gamma + \lambda_h \sin \gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= 0 \\ \dot{\lambda}_h &= - \left( \left( \frac{\lambda_v}{2zm} (2C_1 h + C_2) v^2 S C_D + \frac{\lambda_y}{mv} (2C_1 h + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. C_2) v^2 S (B_1 \alpha + B_2) \cos \theta \right) + \lambda_x \cos \gamma + \right. \\ &\quad \left. \lambda_h \sin \gamma \right) \quad (29) \end{aligned}$$

3. Mendapatkan persamaan state

Persamaan state diperoleh dari model persamaan (1)-(4), sehingga  $\dot{X} = [\dot{v} \dot{\gamma} \dot{x} \dot{h}]$

Dari langkah 1-3 terdapat satu permasalahan yaitu kendali  $T$ . Dalam persamaan Hamiltonian kendali  $T$  muncul secara linear sehingga kendali  $T$  optimal tidak dapat ditentukan pada kondisi stasionernya. Dikarenakan kendali  $T$  adalah terbatas,

maka dapat ditetapkan Hamiltonian yang minimum

seperti dibawah ini[4]:

$$T = \begin{cases} T_{\max} & , \frac{\partial H}{\partial T} < 0 \\ T_{\text{singular}} & , \frac{\partial H}{\partial T} = 0 \\ T_{\min} & , \frac{\partial H}{\partial T} = 0 \end{cases}$$

Fungsi Switching didefinisikan dari kondisi stasioner pada langkah pertama. Sehingga

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\lambda_v}{m} \cos \alpha + \frac{\lambda_y}{mv} \sin \alpha = 0 \quad (30)$$

Pada persamaan (30) kendali  $T$  tidak muncul sehingga perlu diturunkan secara parsial terhadap waktu sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dH_T}{dt} &= 0 \\ \frac{\lambda_v}{m} \cos \alpha + \frac{\lambda_y v - \lambda_y \dot{v}}{mv^2} \sin \alpha &= 0 \quad (31) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (31) maka akan didapatkan kendali  $T$  karena pada  $\dot{\lambda}_v$  kendali  $T$  kembali muncul. Untuk selanjutnya akan dibuktikan apakah kendali  $T$  syarat untuk dikatakan sebagai busur singular. Dan selanjutnya akan dibangun sebuah matriks Generalisasi Legendre-Clebsch.

$$H_{uu} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial T} \frac{dH_T}{dt} & \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial T} & \frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial T} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial T} & \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial T} & \frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H}{\partial \phi^2} \end{bmatrix}$$

Elemen-elemen dari matriks Generalisasi Legendre-Clebsch yang tidak ada yang sama ataupun berlainan tanda. Sehingga kendali  $T$  tidak ada di busur singularnya. Hal ini selanjutnya akan dibuktikan melalui simulasi.

Parameter	Nilai	satuan
$m$	1000	Kg
$g$	10	$m/s^2$
$S$	0.34	$m^2$
$A_1$	-2	
$A_2$	-0.15	
$A_3$	0.23	
$B_1$	22	
$B_2$	0,00001	
$C_1$	$3.32 \times 10^{-9}$	$kg/m^{-5}$
$C_2$	$-1.02 \times 10^{-4}$	$kg/m^{-4}$
$C_3$	1200	$kg/m^{-3}$

Sedangkan nilai syarat batas yang diberikan [5]

$$v(0) = 275,21 m/s, \gamma(0) = 0.523333 \text{ radian}$$

$$x(0) = 0 \text{ meter}, h(0) = 31 \text{ meter}$$

$$T_{maks} = 6000 \text{ N}, T_{minim} = 1000 \text{ N}$$

### 3.2 Diskritisasi Model

Untuk melakukan estimasi posisi terlebih dahulu dilakukan diskritisasi dari model diperoleh

$$\begin{bmatrix} \gamma_{k+1} \\ V_{k+1} \\ x_{k+1} \\ h_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{T \sin \alpha}{mV_k} + \frac{L}{mV_k} \cos \alpha - \frac{g \cos \gamma_k}{V_k} \right) \Delta t + \gamma_k \\ \left( \frac{T \cos \alpha - D}{m} - \frac{L}{m} \sin \alpha - g \sin \gamma_k \right) \Delta t + V_k \\ (V_k \cos \gamma_k) \Delta t + x_k \\ (V_k \sin \gamma_k) \Delta t + h_k \end{bmatrix}$$

Gaya  $D$  bergantung pada nilai  $C_d$  dan  $V$ . Sedangkan  $C_d$  bergantung pada besar  $\alpha$  dan  $\rho$  bergantung pada  $h$ . Sehingga didapatkan

$$\rho_k = C_1 h_k^2 + C_2 h_k + C_3 C_{d,k} = A_1 \alpha_k^2 + A_2 \alpha_k + A_3$$

dan

$$D(h, V, \alpha)_k = \frac{1}{2} C_{d,k} \rho_k V_k S_{ref}$$

Kemudian, gaya  $L$  bergantung pada nilai  $C_l$ ,  $\rho$  dan  $V$ .

$$C_{l,k} = B_1 \alpha_k + B_2 L(h, V, \alpha)_k = \frac{1}{2} C_{l,k} \rho_k V_k^2 S_{ref}$$

Dengan demikian untuk  $k = 0$

$$\rho_0 = C_1 h_0^2 + C_2 h_0 + C_3$$

$$C_{d,0} = A_1 \alpha_0^2 + A_2 \alpha_0 + A_3$$

$$D(h, V, \alpha)_0 = \frac{1}{2} C_{d,0} \rho_0 V_0 S_{ref}$$

$$C_{l,0} = B_1 \alpha_0 + B_2$$

$$L(h, V, \alpha)_0 = \frac{1}{2} C_{l,0} \rho_0 V_0^2 S_{ref}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ V_1 \\ x_1 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{T \sin \alpha_0}{mV_0} + \frac{L_0}{mV_0} \cos \alpha_0 - \frac{g \cos \gamma_0}{V_0} \right) \Delta t + \gamma_0 \\ \left( \frac{T \cos \alpha_0 - D_0}{m} - \frac{L_0}{m} \sin \alpha_0 - g \sin \gamma_0 \right) \Delta t + V_0 \\ (V_0 \cos \gamma_0) \Delta t + x_0 \\ (V_0 \sin \gamma_0) \Delta t + h_0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan diterasi secara terus-menerus diperoleh

$$\begin{bmatrix} \gamma_{n+1} \\ V_{n+1} \\ x_{n+1} \\ h_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{T}{mV_n} \sin \alpha_n + \frac{L_n}{mV_n} \cos \alpha_n - \frac{g \cos \gamma_n}{V_n} \right) \Delta t + \gamma_n \\ \left( \frac{T \cos \alpha_n - D_n}{m} - \frac{L_2}{m} \sin \alpha_n - g \sin \gamma_n \right) \Delta t + V_n \\ (V_n \cos \gamma_n) \Delta t + x_n \\ (V_n \sin \gamma_n) \Delta t + h_n \end{bmatrix}$$

Jika dituliskan secara lengkap untuk  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , maka model diskrit secara umum dapat dituliskan ke dalam bentuk fungsi nonlinear

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

### 3.3 Penambahan Faktor Stokastik

Model misil masih dalam bentuk deterministik. Oleh karena itu, harus ditambahkan faktor stokastik dalam bentuk noise pada masing-masing persamaan. Dengan demikian didapatkan model stokastik

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k z_k = H x_k + v_k$$

dengan  $f(x_k, u_k)$  adalah fungsi nonlinear.

Noise sistem  $w_k$  dan noise pengukuran  $v_k$  dalam hal ini dibangkitkan melalui komputer dan biasanya diambil berdistribusi normal serta mempunyai mean nol [2]. Secara umum variansi noise sistem dinyatakan dengan  $Q_k$  dan variansi noise pengukuran dinyatakan dengan  $R_k$ , yaitu keduanya bergantung pada waktu.

### 3.4 Implementasi Metode Ensamble Kalman Filter

yang harus dilakukan adalah mendefinisikan  $X$ , yaitu

$$X = [\gamma \ V \ x \ h]^T$$

kemudian memberikan nilai awal untuk masing-masing variabel yaitu nilai posisi sudut ( $\gamma_0$ ), kecepatan ( $V_0$ ), posisi pada sumbu-x ( $x_0$ ) dan ketinggian ( $h_0$ ). Hal ini bisa dituliskan

$$X_0 = [\gamma_0 \ V_0 \ x_0 \ h_0]^T$$

Model sistem

$$X_{k+1} = f(X_k, u_k) + w_k$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{k+1} \\ V_{k+1} \\ x_{k+1} \\ h_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{T}{mV_k} \sin \alpha_k + \frac{L_k}{mV_k} \cos \alpha_k - \frac{g \cos \gamma_k}{V_k} \right) \Delta t + \gamma_k \\ \left( \frac{T \cos \alpha_k - D_k}{m} - \frac{L_k}{m} \sin \alpha_k - g \sin \gamma_k \right) \Delta t + V_k \\ (V_k \cos \gamma_k) \Delta t + x_k \\ (V_k \sin \gamma_k) \Delta t + h_k \end{bmatrix} + w_k$$

Dengan  $w_k$  adalah noise sistem yang berdistribusi normal dengan *mean* (rata-rata) nol dan varians  $Q$ ,  $w_k \sim N(0, Q_k)$ .

#### Model Pengukuran

Jika posisi mendarat merupakan variabel yang bisa diukur maka digunakan matriks pengukuran  $H$  sebagai berikut

$$H = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

Sehingga diperoleh persamaan pengukuran  $z$  adalah

$$z_k = HX_k + v_k$$

$$z_k = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} \gamma \\ V \\ x \\ h \end{bmatrix} + v_k$$

Dengan  $v_k$  adalah noise sistem yang berdistribusi normal dengan *mean* (rata-rata) nol dan varians  $R$ ,  $w_k \sim N(0, R_k)$ .

#### Inisialisasi

Inisialisasi pada EnKF terlebih dahulu harus dilakukan pembangkitan sejumlah ensemble sesuai tebakan nilai awal untuk masing-masing state dengan memberikan noise sistem.

$$X_{k,i} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ V_0 \\ x_0 \\ h_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \\ w_{3,i} \\ w_{4,i} \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N_\varepsilon$$

Kemudian dari nilai  $X_{k,1}$  hingga  $X_{k,N_\varepsilon}$  akan dikumpulkan sehingga didapatkan matriks kolom berukuran (4x1) sejumlah ensemble yang dibangkitkan sehingga didapatkan sebuah matriks berukuran (4xN)

$$\begin{bmatrix} X_{k,1} & X_{k,2} & X_{k,3} & \dots & X_{k,N_\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 + w_{1,1}\gamma_0 + w_{1,2}\gamma_0 + w_{1,3} & \gamma_0 + w_{1,N_\varepsilon} \\ V_0 + w_{2,1}V_0 + w_{2,2}V_0 + w_{2,3} & V_0 + w_{2,N_\varepsilon} \\ x_0 + w_{3,1}x_0 + w_{3,2}x_0 + w_{3,3} & \dots & x_0 + w_{3,N_\varepsilon} \\ h_0 + w_{4,1}h_0 + w_{4,2}h_0 + w_{4,3} & h_0 + w_{4,N_\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya adalah mencari nilai rata-rata setiap state dari pembangkitan ensemble

$$\hat{X}_0 = \hat{X}_0^* = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} X_{0,i}$$

$$= \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \begin{bmatrix} \gamma_0 + w_{1,1}\gamma_0 + w_{1,2}\gamma_0 + w_{1,3} & \gamma_0 + w_{1,N_\varepsilon} \\ V_0 + w_{2,1}V_0 + w_{2,2}V_0 + w_{2,3} & V_0 + w_{2,N_\varepsilon} \\ x_0 + w_{3,1}x_0 + w_{3,2}x_0 + w_{3,3} & \dots & x_0 + w_{3,N_\varepsilon} \\ h_0 + w_{4,1}h_0 + w_{4,2}h_0 + w_{4,3} & h_0 + w_{4,N_\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_0 \\ \hat{V}_0 \\ \hat{x}_0 \\ \hat{h}_0 \end{bmatrix}$$

#### Tahap Prediksi

Tahap Prediksi pada EnKF mula-mula dihitung nilai prediksi dengan menggunakan nilai  $\hat{X}_k$  kemudian ditambahkan noise sistem  $w_k$ .

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k,i}^- &= f(\hat{X}_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k,i} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{k-1} \\ \hat{V}_{k-1} \\ \hat{x}_{k-1} \\ \hat{h}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \\ w_{3,i} \\ w_{4,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{k-1} + w_{1,i} \\ \hat{V}_{k-1} + w_{2,i} \\ \hat{x}_{k-1} + w_{3,i} \\ \hat{h}_{k-1} + w_{4,i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### Menghitung nilai estimasi pada tahap prediksi

Nilai estimasi pada tahap prediksi didapatkan dengan perhitungan sebagai berikut

$$\hat{X}_k^- = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \hat{X}_{k,i}^-$$

Kemudian dicari nilai error estimasi dengan cara menghitung selisih antara nilai prediksi dengan rata-rata estimasi. Jika nilai error ini dilambangkan dengan  $E$  maka didapatkan

$$E = \hat{X}_{k,i}^- - \hat{X}_k^-$$

Dimana nilai  $E$  ini akan digunakan untuk menghitung nilai kovarian error.

#### Menghitung nilai kovarian error pada tahap prediksi

Kovarian error pada tahap prediksi disimbolkan dengan  $P_k^-$ . Nilai ini didapatkan dengan mengalikan nilai  $E$  dengan  $E^T$  kemudian dicari rata-ratanya.

$$\begin{aligned} P_k^- &= \frac{1}{N_\varepsilon - 1} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} EE^T \\ &= \frac{1}{N_\varepsilon - 1} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (\hat{X}_{k,i}^- - \hat{X}_k^-)(\hat{X}_{k,i}^- - \hat{X}_k^*)^T \end{aligned}$$

#### Tahap Koreksi

Pada tahap ini terlebih dahulu dihitung data pengukuran  $z_{k,i}$  yang merupakan duplikasi dari data pengukuran pada sistem real yaitu  $z_k$  ditambah noise pengukuran. Secara sederhana dapat dituliskan sebagai berikut

$$z_{k,i} = z_k + v_{k,i}$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung Kalman Gain. Kalman Gain dihitung

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R_k)^{-1}$$

Dengan  $P_k^-$  adalah kovarian error pada tahap prediksi,  $H$  adalah matriks pengukuran, dan  $R_k$  adalah kovarian pada noise pengukuran.

Kemudian dihitung nilai estimasi koreksi dengan persamaaan:

$$\hat{x}_{k,i} = \hat{x}_{k,i}^- + K_k(z_{k,i} - H\hat{x}_{k,i}^-)$$

Dengan  $\hat{x}_{k,i}$  adalah nilai estimasi pada tahap prediksi,  $K_k$  adalah Kalman Gain,  $z_{k,i}$  adalah data pengukuran pada tahap koreksi, dan  $H$  adalah matriks pengukuran.

Setelah didapatkan nilai estimasi koreksi, selanjutnya adalah menghitung rata-rata estimasi koreksi dengan :

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \hat{x}_{k,i}$$

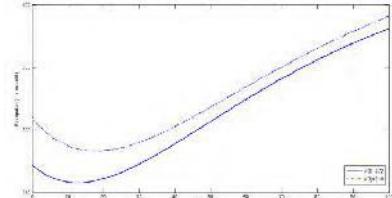
Nilai inilah yang digunakan untuk membandingkan hasil estimasi dari metode EnKF dengan nilai sebenarnya.

Untuk menghitung kovariansi error pada tahap koreksi ( $P_k$ ) dengan persamaan :

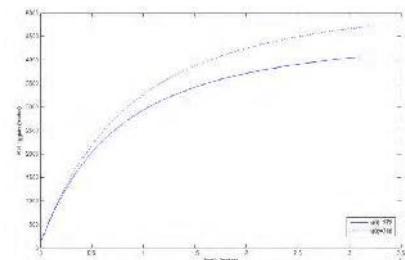
$$P_k = [I - K_k H] P_k^-$$

### 3.5 Simulasi

Simulasi pertama akan dilakukan dengan ketinggian tempat peluncuran 100 meter dan kecepatan yang digunakan adalah  $250 \text{ ms}^{-1}$  dan  $300 \text{ ms}^{-1}$ .



Gambar 2: perubahan kecepatan( $v$ ) saat peluncuran



Gambar 4: perubahan ketinggian saat peluncuran  
Dari hasil ini dapat dilihat bahwa keadaaan akhir dari misil dipengaruhi oleh kecepatan awal misil dan ketinggian saat melakukan peluncuran. Sedangkan variable kendali yang ada menunjukkan tak ada perubahan selama meluncur sehingga keadaan akhir dari misil tidak terpengaruh dengan daya dorongnya.

### 3.6 Simulasi Estimasi Posisi

Dalam simulasi ini, nilai awal yang digunakan adalah

$$\gamma_0 = 0 * \pi / 180 \text{ rad};$$

$$V_0 = 250 \text{ m/s} \text{ dan } 300;$$

$$h_0 = 100 \text{ m; dan}$$

$$x_0 = 0$$

Sedangkan ensamble yang dibangkitkan adalah sebanya 500 dan 100 ensamble

Dari hasil simulasi yang telah dilakukan, didapatkan kondisi yang cocok untuk mengestimasi posisi misil pada lintasannya dengan menggunakan

metode Ensemble Kalman Filter pada input sudut  $\alpha$  yang tetap. Kondisi yang cocok ini dilihat dari besar error RMS yang kecil serta kemampuannya untuk mengestimasi nilai dari setiap parameter.

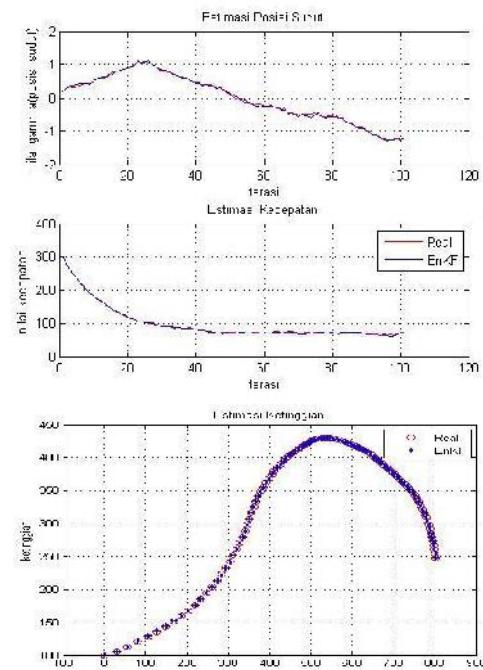
Gambar 5 memperlihatkan hasil estimasi posisi misil dengan asumsi alat ukur diberikan pada posisi sudut yang dimulai dengan ketinggian awal 0 meter dan mencapai ketinggian maksimal pada 573 meter dan pada ketinggian 250 meter misil mulai menurun/menghunjam ke target. Simulasi ini dilakukan dengan membangkitkan sebanyak 500 buah ensemble. Pada gambar tersebut terlihat bahwa hasil estimasi terbaik hanya berlaku pada posisi sudut, sedangkan parameter lainnya seperti kecepatan, posisi mendatar, dan ketinggian tidak bisa didapatkan hasil estimasi yang baik. Dengan nilai RMS sebagai berikut

RMS Error pada gamma = 0.038352

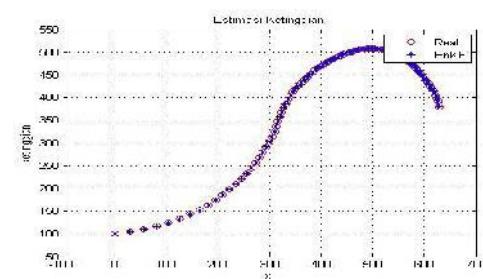
RMS Error pada kecepatan = 1.7638

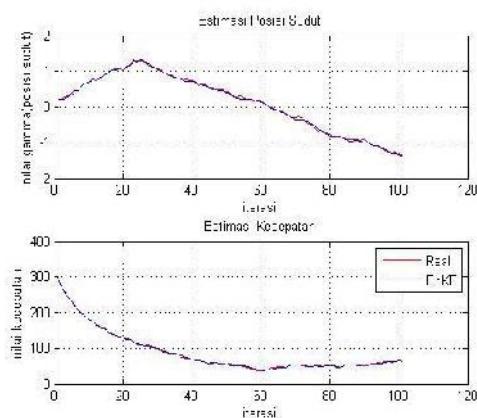
RMS Error pada x= 0.20936

RMS Error pada ketinggian = 0.22284



Gambar 5: estimasi kecepatan, posisi dan ketinggian dengan membangkitkan ensamble sebanyak 500





Gambar 6: estimasi kecepatan, posisi dan ketinggian dengan membangkitkan ensamble sebanyak 1000

Gambar 6 memperlihatkan hasil estimasi posisi misil dengan asumsi alat ukur diberikan pada posisi sudut dimulai dengan ketinggian awal 100 meter dan mencapai ketinggian maksimal pada 482 meter dan pada ketinggian 678 meter misil mulai menurun/menghunjam ke target. Simulasi ini dilakukan dengan membangkitkan sebanyak 1000 buah ensemble. Pada gambar tersebut terlihat bahwa hasil estimasi terbaik hanya berlaku pada posisi sudut, sedangkan parameter lainnya seperti kecepatan, posisi horizontal, dan ketinggian tidak bisa didapatkan hasil estimasi yang baik. Dengan nilai RMS sebagai berikut

RMS Error pada gamma = 0.03444  
RMS Error pada kecepatan = 1.9261  
RMS Error pada x = 0.18871  
RMS Error pada ketinggian = 0.2133

#### 4. KESIMPULAN

Analisis dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan spembahasan maka dapat disimpulkan untuk simulasi dengan batasan waktu 100 detik bahwa keadaan atau *state akhir* dipengaruhi oleh ketinggian tempat peluncuran misil dan kecepatan awal. Sehingga untuk mendapatkan lintasan yang optimal harus memperhatikan ketinggian tempat peluncuran misil dan kecepatan awal.
2. Metode Ensemble Kalman Filter bisa digunakan untuk mengestimasi lintasan misil sehingga bisa diketahui arah pergerakannya.
3. Pada kondisi nilai  $\alpha$  tetap.  
Selama iterasi, hasil estimasi akan didapatkan dengan baik jika kecepatan ( $v$ ) merupakan parameter yang bisa diukur. Jika parameter yang bisa diukur adalah hanya pada posisi sudut ( $y$ ), ketinggian ( $h$ ), atau posisi horizontal ( $x$ ) maka tidak didapatkan hasil estimasi yang baik. Hasil estimasi akan jauh lebih baik jika seluruh

parameter bisa diukur dengan membangkitkan sebanyak 500 dan 1000 buah ensemble.

#### PUSTAKA

- [1] Apriliani, E., B. A. Sanjaya, and D. Adzkiyah, 2009, The Groundwater Pollution Estimation by the Ensemble Kalman Filter, dipresentasikan di International Conference on Natural and Material Sciences, 3-4 Juli 2009, Banjarmasin.
- [2] Apriliani, E., B. A. Sanjaya, dan D. K. Arif, 2010, The Square Root Ensemble Kalman Filter to Estimate the Concentration of Air Pollution, Proceeding International Conference on Mathematics and Applied Engineering, Kuala Lumpur, Malaysia.
- [3] Cahyaningtias, Sari. 2011. "Waktu Optimum pada Peluru Kendali dengan Manuver Akhir Menghunjam Vertikal". **Surabaya: Jurusan Matematika ITS.**
- [4] Hongyan Yan, Yuanguo Zhu..2015."bang-bang control model for uncertain swithched systems".*Applied Mathematical Modelling, Volume 39, Issues 10–11, 1 June 2015, Pages 2994-3002*
- [5] Horie, Kazuhiro dan Conway, Bruce A.. 2006. "Optimal Fighter Pursuit-Evasion Maneuver Found via Two-Sided Optimization". **Journal of Guidance, Control, and Dynamic, vol.29, No.1, January–February 2006.**
- [6] Ikhwan, A. 2010. "Estimasi Posisi dan Kecepatan Kapal Selam Menggunakan Metode Extended Kalman Filter". Tugas Akhir, Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya, Indonesia
- [7] Naidu, Desineni Subrahman. 2002. "Optimal Control System". **Idaho: CRC Press.**
- [8] Rudi. 2007. "Estimasi Variabel Keadaan Sistem Model pengukuran Taklinier Menggunakan extended kalman filter dan unscented kalman filter". Thesis. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya
- [9] Subchan, Subchan dan Zbikowski, Rafal. 2009. "Computational Optimal Control". **West Sussex: John Wiley and Son Ltd.**