Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Hasil Amalgamasi Sisi dari Graf Bintang dan Graf Lengkap

Fiqih Rahman Hartiansyah[1], Darmaji[2]

[1]*Institut Sains dan Teknologi Annuqayah, fiqih.math@gmail.com*
[2]*Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, darmaji@matematika.its.ac.id*

DOI 10.31102/zeta.2023.8.2.66-70

ABSTRACT

The locating coloring of graph extends the vertex coloring dan partition dimension of graph. The minimum number of locating coloring of graph G is called the locating chromatic number of graph G. In this paper will discuss the locating chromatic number of edge amalgamation graph of star graph with order m+1 and complete graph with order n. The method used to obtain the locating chromatic number of graph is to determine the upper dan lower bound. The results obtained are that the locating chromatic number of edge amalgamation graph of star graph with order m+1 and complete graph with order n is $max\{m, n\}$ *for* $m \geq 3$ *and* $n \geq 4$.

Keywords: ***locating chromatic number, edge amalgamation graph, star graph, complete graph***

ABSTRAK

Pewarnaan lokasi pada graf merupakan pengembangan dari konsep pewarnaan simpul dan dimensi partisi pada graf. Banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi dari graf G. Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dengan order m+1 dan graf lengkap dengan order n. Metode yang digunakan untuk mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari graf adalah dengan menentukan batas atas dan batas bawah. Hasil yang diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dengan order $m + 1$ *dan graf lengkap dengan order* n *adalah* $max\{m, n\}$ *untuk* $m \geq 3$ *dan* $n \geq 4$.

Kata Kunci: ***bilangan kromatik lokasi, graf hasil amalgamasi sisi, graf bintang, graf lengkap***

1. PENDAHULUAN

Pewarnaan lokasi pada graf merupakan pengembangan dari konsep pewarnaan simpul dan dimensi partisi pada graf. Kajian tentang pewarnaan lokasi pada graf merupakan kajian yang cukup baru di bidang teori graf. Konsep pewarnaan lokasi yang pertama kali dikaji oleh Chartrand, dkk. (2002). Peneliti ini menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf, diantaranya graf lintasan, graf sikel, graf bintang ganda dan graf multipartit lengkap. Bilangan kromatik lokasi pada graf lintasan P_n adalah 3 untuk $n \geq 3$. Pada graf sikel diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Sedangkan pada graf bintang ganda diperoleh $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$ untuk $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$. Misalkan graf terhubung G berorder $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) = n$ jika dan hanya jika graf multipartit lengkap. Sehingga bilangan kromatik lokasi pada graf lengkap K_n adalah n.

Chartrand, dkk. (2003) juga mengkarakterisasi semua graf terhubung G berorder n dengan bilangan kromatik lokasi $n-1$ dan $n-2$. Asmiati, dkk. (2011) menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi simpul dari k buah graf bintang. Bilangan kromatik lokasi pada graf bintang S_n adalah $n+1$. Penulis lain juga menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf-graf hasil operasi, diantaranya adalah Baskoro dan Purwasih (2012) menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil korona dari dua graf, Behtoei dan Anbarloei (2014) menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil join dari dua graf.

Beberapa penulis, diantaranya Darmawahyuni dan Narwen (2016) menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf ulat, Silvia, dkk. (2018) menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf lobster $L_{n,m,1}$ dengan $n = 2,3,4$ dan $m = 3$, Nur, dkk. (2020) menentukan bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan Rahmatalia, dkk. (2022) menentukan bilangan kromatik lokasi graf split lintasan.

Berdasarkan uraian di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dengan *order* $m+1$ dan graf lengkap dengan *order* n.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf, dinotasikan dengan $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan berhingga (V, E) dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut simpul (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan (boleh kosong) dengan elemen dari pasangan tak terurut (u, v) dengan $u, v \in V(G)$ dan $u \neq v$, yang disebut sisi (*edge*). Untuk penyederhanaan penulisan, sisi $e = (u, v) \in E(G)$ dapat ditulis $e = uv \in E(G)$ dan graf $G = (V, E)$ dapat ditulis G. Banyak simpul dari graf G disebut *order* dari G, dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan banyak sisi dari graf G disebut *size* dari G, dinotasikan dengan $|E(G)|$. Jika terdapat sebuah sisi antara u dan v, yaitu $e = uv \in E(G)$ maka simpul u dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan simpul v sedangkan sisi e dikatakan melekat (*incident*) dengan simpul u dan v.

Derajat (*degree*) simpul v, dinotasikan $deg(v)$ adalah banyak sisi yang melekat pada simpul v. Simpul dengan derajat nol disebut simpul terisolasi (*isolated vertex*) sedangkan simpul dengan derajat satu disebut simpul anting (*pendant*). Sisi yang simpul ujungnya pada simpul yang sama disebut *loop* sedangkan beberapa sisi berbeda yang mempunyai simpul ujung yang sama disebut sisi ganda (*multiple edge*). Graf yang tidak mempunyai *loop* dan sisi ganda disebut graf sederhana (*simple graph*). Graf G disebut terhubung (*connected*) jika setiap dua simpul sebarang berbeda terhubung.

2.2 Jenis-Jenis Graf

2.2.1 Graf Bintang (Star Graph)

Graf bintang, dinotasikan dengan S_n untuk $n \geq 3$ adalah graf terhubung sederhana yang satu simpulnya berderajat n sedangkan simpul yang lainnya berderajat satu. *Order* dan *size* dari graf bintang adalah $n+1$ dan n.

2.2.2 Graf Lengkap (Complete Graph)

Graf lengkap, dinotasikan dengan K_n untuk $n \geq 4$ adalah graf terhubung sederhana yang setiap simpulnya berderajat $n-1$. *Order* dan *size* dari graf lengkap adalah n dan $n(n-1)/2$.

2.3 Amalgamasi Sisi

Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf terhubung. Amalgamasi sisi dari graf G_1 dan graf G_2 dengan menggabungkan sisi $e \in E(G_1)$ dan sisi $f \in E(G_2)$, dinotasikan dengan $amal_s(G_1, G_2; e, f)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan sisi *e* dari graf G_1 dan sisi f dari graf G_2 menjadi satu sisi g, dimana g adalah sisi bersama dari graf hasil $amal_s(G_1, G_2; e, f)$.

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi

2.4.1 Pewarnaan Simpul

Pewarnaan simpul dari G adalah pemberian warna pada setiap simpul di G sedemikian sehingga tidak terdapat dua simpul bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan simpul dari G.

2.4.2 Dimensi Partisi

Misalkan G adalah graf terhubung dan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$. Untuk setiap $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai k-vektor : $r(v|\Pi) =$

ISSN: 2459-9948
e-ISSN: 2579-5864

$\left(d(v,S_1), d(v,S_2), \cdots, d(v,S_k)\right)$, dimana $d(v,S_i) = \min\{d(v,x): x \in S_i\}$ untuk $1 \le i \le k$. Jika setiap simpul di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut partisi pembeda dari G. Dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ adalah banyaknya partisi minimum pada partisi pembeda dari G.

2.4.3 Pewarnaan Lokasi

Misalkan c adalah pewarnaan-k simpul dari graf terhubung G dan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang dihasilkan. Untuk setiap $v \in V(G)$, kode warna dari v terhadap Π didefinisikan sebagai k-vektor: $c_\Pi(v) = \left(d(v,C_1), d(v,C_2), \cdots, d(v,C_k)\right)$, dimana $d(v,C_i) = \min\{d(v,x): x \in C_i\}$ untuk $1 \le i \le k$. Jika setiap simpul di G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari G. Karena setiap pewarnaan lokasi merupakan pewarnaan maka $\chi(G) \le \chi_L(G)$.

Proposisi 2.1 Misalkan H adalah subgraf dari graf G. Maka $\chi_L(G) \ge \chi_L(H)$.

Bukti. Apapun warna-warna yang digunakan pada simpul-simpul dari subgraf H dalam pewarnaan lokasi minimum dari graf G juga dapat digunakan dalam pewarnaan lokasi dari subgraf H dengan sendirinya. ■

3. METODE PENELITIAN

Beberapa tahapan dilakukan sehingga diperoleh teorema terkait bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dan graf lengkap sebagai berikut:

a. Mengkonstruksi graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dan graf lengkap.
b. Menentukan pewarnaan lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dan graf lengkap.
c. Menentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi diperoleh dari pewarnaan lokasi yang sesuai.
d. Menentukan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi diperoleh dengan menggunakan proposisi dan teorema yang ada.

4. HASIL PENELITIAN

Teorema 4.1 Diberikan graf bintang S_m dengan *order* $m+1$ dan graf lengkap K_n dengan *order* n untuk $m \ge 3$ dan $n \ge 4$. Maka bilangan kromatik lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e, f)$ adalah $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e, f)\right) = max\{m, n\}$.

Bukti. Ambil $e_1 = f_1$, dimana sisi $e_1 \in E(S_m)$ dan sisi $f_1 \in E(K_n)$. Pandang tiga kasus berikut:

Kasus 1: Untuk $m = n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right)$ untuk $m = n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

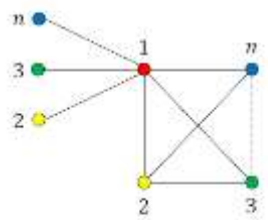
$C_1 = \{w_1\}$, $C_2 = \{w_2\} \cup \{u_3\}$ dan $C_i = \{u_{i+1}, v_i\}$ untuk $3 \le i \le n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1,\cdots,1)$.
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0,\cdots,1)$ dan $c_\Pi(u_3) = (1,0,\cdots,2)$.
iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_{i+1}) = (1,2,\cdots,\cdots)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1,\cdots,\cdots)$ untuk $3 \le i \le n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right) \le n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right)$ untuk $m = n$. Berdasarkan Gambar 1, di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf bintang S_{m-1} dan graf lengkap K_n. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right) \ge \chi_L(S_{m-1}) = m$ atau $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right) \ge \chi_L(K_n) = n$. Karena $m = n$ maka $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right) \ge n$. Karena $n \le \chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right) \le n$ maka $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right) = n$.



Gambar 1. Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m = n$.

Kasus 2: Untuk $m < n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right)$ untuk $m < n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ adalah partisi dari $V\left(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)\right)$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\}$, $C_2 = \{w_2\} \cup \{u_3\}$, $C_i = \{u_{i+1}, v_i\}$ untuk $3 \le i \le m$ dan $C_i = \{v_i\}$ untuk $m+1 \le i \le n$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada n kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1,\cdots,1)$.

ISSN: 2459-9948
e-ISSN: 2579-5864

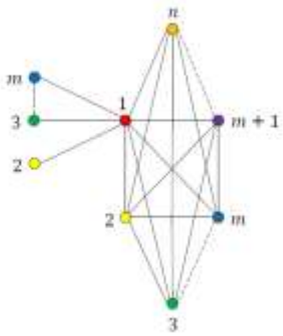
ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0,\cdots,1)$ dan $c_\Pi(u_3) = (1,0,\cdots,2)$.

iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_{i+1}) = (1,2,\cdots,2)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1,\cdots,1)$ untuk $3 \le i \le m$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

iv. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_i) = (1,1,\cdots,\cdots)$ untuk $m+1 \le i \le n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \le n$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1))$ untuk $m < n$. Berdasarkan Gambar 2, di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf bintang S_{m-1} dan graf lengkap K_n. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \ge \chi_L(S_{m-1}) = m$ atau $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \ge \chi_L(K_n) = n$. Karena $m < n$ maka $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \ge n$. Karena $n \le \chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \le n$ maka $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) = n$.



Gambar 2. Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m < n$.

Kasus 3: Untuk $m > n$.

Menentukan batas atas dari $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1))$ untuk $m > n$. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ adalah partisi dari $V(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1))$ berdasarkan pewarnaan simpul c dengan:

$C_1 = \{w_1\}$, $C_2 = \{w_2\} \cup \{u_3\}$, $C_i = \{u_{i+1}, v_i\}$ untuk $3 \le i \le n$ dan $C_i = \{v_i\}$ untuk $n+1 \le i \le m$.

Kode warna dari setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terhadap Π dapat dilihat pada m kelas warna berikut:

i. Kelas warna C_1: $c_\Pi(w_1) = (0,1,1,\cdots,1)$.

ii. Kelas warna C_2: $c_\Pi(w_2) = (1,0,1,\cdots,2)$ dan $c_\Pi(u_3) = (1,0,2,\cdots,2)$.

iii. Kelas warna C_i: $c_\Pi(u_{i+1}) = (1,2,\cdots,2,2)$ dan $c_\Pi(v_i) = (1,1,\cdots,2,2)$ untuk $3 \le i \le n$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

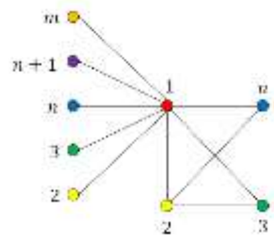
iv. Kelas warna C_i: $c_\Pi(v_i) = (1,2,2,2,\cdots)$ untuk $n+1 \le i \le m$ dengan koordinat ke-i pada setiap kode warna adalah 0.

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap simpul di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π. Jadi, c adalah pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ dan $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \le m$.

Menentukan batas bawah dari $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1))$ untuk $m > n$. Berdasarkan Gambar 3, di graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ terdapat subgraf yang isomorfis dengan graf bintang S_{m-1} dan graf lengkap K_n. Sehingga dengan menggunakan Proposisi 2.1 diperoleh $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \ge \chi_L(S_{m-1}) = m$ atau $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \ge \chi_L(K_n) = n$. Karena $m > n$ maka $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \ge m$.

Karena $m \le \chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) \le m$ maka $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)) = m$.

Tanpa mengurangi keumuman, ambil sebarang $e = f$, dimana sisi $e \in E(S_m)$ dan sisi $f \in E(K_n)$. Maka berlaku $\chi_L(amal_s(S_m, K_n; e, f)) = max\{m, n\}$. ∎



Gambar 3. Pewarnaan lokasi pada graf hasil $amal_s(S_m, K_n; e_1, f_1)$ untuk $m > n$.

5. KESIMPULAN

Hasil dari penelitian ini diperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dengan *order* $m+1$ dan graf lengkap dengan *order* n adalah $max\{m, n\}$ untuk $m \ge 3$ dan $n \ge 4$.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H., Baskoro, E.T. (2011) Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars, ITB J. Sci. 43 A(1):1-8.

Amalia, R., Firdausiyah, Yulianto, Tony., Faisol, Kuzairi. (2022) The Local Strong Metric Dimension in the Join of Graphs. Journal of Physics: Conference Series. 2157. 012004

Amalia, R., Mufidah, SA., Yulianto, Tony., Faisol, Kuzairi. (2021) The complement metric dimension of particular tree. Journal of Physics: Conference Series.

ISSN: 2459-9948
e-ISSN: 2579-5864

1836. 012011.

Baskoro, E.T., Purwasih, I.A. (2012) The Locating-Chromatic Number for Corona Product of Graphs, Southeast-Asian J. of Sciences. 1(1):124-134.

Behtoei, A., Anbarloei, M. (2014) The locating chromatic number of the join of graphs, Bull. Iranian Math. Soc. 40(6):1491-1504.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., Zhang, P. (2002) The locating-chromatic number of a graph, Bull. Inst. Combin. Appl. 36:89-101.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., Zhang, P. (2003) Graphs of order n with locating-chromatic number n-1, Discrete Mathematics. 269:65-79.

Chartrand, G., Lesniak, L. (1996) Graphs & Digraphs, Chapman & Hall, London.

Chartrand, G., Salehi, E., Zhang, P. (2000) The partition dimension of a graph, Aequationes Mathematicae. 59:45-54.

Darmawahyuni, A., Narwen. (2016) Bilangan Kromatik Lokasi Dari Graf Ulat, Jurnal Matematika UNAND. 5(1):1-6.

Gross, J.L., Yellen, J. (2006) Graph Theory and its Applications, Chapman & Hall, Francis.

Hartsfield, N., Ringel G. (1990) Pearls in Graph Theory, Academic Press, London.

Marsudi (2016) Teori Graf, UB Press, Malang.

Nur, M., Welyyanti, D., Narwen. (2020) Bilangan Kromatik Lokasi Untuk Graf Pohon Pisang $\boldsymbol{B_{n,k}}$, Jurnal Matematika UNAND. 9(2):70-75.

Rahmatalia, S., Asmiati, Notiragayu. (2022) Bilangan Kromatik Lokasi Graf Split Lintasan, Jurnal Matematika Integratif. 18(1):73-80.

Silvia, M., Welyyanti, D., Efendi. (2018) Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Lobster $\boldsymbol{L_{n,m,1}}$ Dengan $\boldsymbol{n = 2, 3, 4}$ Dan $\boldsymbol{m = 3}$, Jurnal Matematika UNAND. 7(3):94-103.

West, D.B. (2001) Introduction to Graph Theory, University of Illinois, Urbana.