Estimator Deret Fourier Dalam Regresi Nonparametrik dengan Penalti Untuk Perencanaan Penjualan Produk Musiman

Sahidah[1], Kuzairi[2], M. Fariz Fadillah Mardianto[3]

[1]*Universitas Islam Madura, nink_sahidah@gmail.com*
[2]*Universitas Islam Madura, kuzairi81@gmail.com*
[3]*Universitas Airlangga, m.fariz.fadillah.m@fst.unair.ac.id*

DOI 10.31102/zeta.2022.7.2.69-78

ABSTRACT

Regression approach can be done with three approaches, namely parametric, semiparametric, and nonparametric approaches. One of the nonparametric approaches developed is using the Fourier series estimator. The Fourier series is a good estimator for predicting a periodic regression curve. The purpose of this study is to obtain the form of a Fourier series estimator in nonparametric regression using the PLS (Penalized Least Square) method, as well as to model the sales level of seasonal products in Pamekasan by producing sine, cosine, sine and cosine curves on periodic data. The nonparametric regression estimator with the Fourier series approach obtained the smallest GCV, MSE and high R^2 values. The best model is on a cosine basis with a GCV value of 1.180, MSE of 0.4169762, and R^2 of 100%.

Keywords: ***nonparametric regression, fourier series, PLS, GCV, seasonal product***

ABSTRAK

Pendekatan regresi dapat dilakukan dengan tiga pendekatan yaitu pendekatan parametrik, semiparametrik, dan nonparametrik. Salah satu pendekatan nonparametrik yang dikembangkan adalah menggunakan estimator deret Fourier. Deret Fourier merupakan estimator yang baik untuk menduga suatu kurva regresi yang bentuknya periodik. Tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh bentuk estimator deret Fourier dalam regresi nonparametrik dengan menggunakan metode PLS (Penalized Least Square), serta memodelkan tingkat penjualan produk musiman di pamekasan dengan menghasilkan kurva sinus, cosinus, sinus dan cosinus pada data yang bersifat periodik. Estimator regresi nonparametrik dengan pendekatan deret Fourier diperoleh nilai GCV, MSE terkecil serta R^2 tinggi. Model terbaiknya berada pada basis cosinus dengan nilai GCV sebesar 1.180, MSE sebesar 0.4169762, dan R^2 sebesar 100%.

Kata Kunci: ***regresi nonparametrik, deret fourier, PLS, GCV, produk musiman***

1. PENDAHULUAN

Permintaan para konsumen terhadap suatu produk tidak dapat dipastikan terutama produk musiman sehingga perencanaan produksi harus tepat dan optimal. Perusahaan perlu meramalkan atau memperkirakan peningkatan penjulan sebagi suatu persiapan dan membuat rencana kembali yang lebih baik dimasa mendatangHal ini, banyak di jumpai berbagai macam kendala baik dari faktor musim maupun sistem dalam pengolahan perusahaan. (Dalimunthe, 2009).

Persaingan dunia industri, perusahaan perlu untuk memiliki keunggulan kompetitif agar dapat bertahan, sehingga perlu perencanaan yang tepat untuk penjualan suatu produk, terutama produk musiman yang memiliki batas tertentu, baik dari jenis (kualitas), jumlah yang akan dijual (kuantitas), harga yang akan dijual untuk meminimalisir kerugian pada perusahan (Junida, 2009). Penentuan harga merupakan salah satu masalah pada organisasi yang berhubungan pada persediaan. Tanpa adanya persediaan, para pengusaha akan dihadapkan pada resiko.

Usaha industri sering dijumpai adanya keterkaitan sehari-hari antara satu hal dengan yang lainnya atau dalam bahasa matematika disebut keterkaitan antara variabel. Model Kausalitas hubungan antara variabel respon dan prediktor disebut model regresi. Secara singkat dalam analisis regresi variabel prediktor digunakan sebagai penduga untuk variabel respon (Tiro, 2010).

Analisis regresi merupakan salah satu metode statistik yang digunakan untuk mengetahui pola hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon (Drapper dan Smith, 1992). Untuk mengestimasi suatu kurva regresi ada tiga cara, yaitu regresi parametrik digunakan jika bentuk kurva regresi diketahui. Regresi nonparametrik digunakan jika kurva regresi tidak diketahui bentuk pola hubungannya. Gabungan antara regresi parametrik dan regresi nonparametrik merupakan definisi dari regresi semiparametrik. Metode penalti menggantikan suatu batasan permasalahan optimasi dengan suatu rangkaian permasalahan tanpa pembatas, dimana solusi tersebut harus memusat kesuatu solusi dari permasalahan dengan pembatas yang asli. Penalti tersebut akan digunakanketika batasan dilanggar dan penalti tersebut menjadi nol di daerah dimana batasan tidak dilanggar. Penggunaan dari parameter *penalti* diperkenalkan pada model batasan dari sistem struktural untuk tujuan menghitung frekuensi alami yang digunakan oleh Ilanko dan Dickinson (1999). Beberapa penelitian dengan menggunakan estimator deret Fourier untuk mengestimasi suatu model data pernah dilakukan oleh semiati (2010) mengembangkan model estimasi untuk pendekatan deret Fourier pada regresi nonparametrik birespon (Ayu, *et al.*, 2015). Nurjannah, *et.al* (2015) melakukan pemodelan regresi nonparametrik pada pola data curah hujan di Kota Semarang.

Berdasarkan penjelasan tentang deret Fourier dan parameter penalti, maka penalti akan melakukan estimasi kurva regresi nonparametrik terhadap penjualan produk musiman dengan menggunakan estimator deret Fourier dalam regresi nonparametrik dengan parameter penalti. Penelitian ini bertujuan untuk memprediksi tingkat penjualan produk musiman di Pamekasan.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sirkulasi Barang Di Toko Dan Faktor Pengaruhnya

Produk barang dan jasa yang dilakukan diarahkan untuk mencapai tujuan perusahaan, yaitu mendapatkan laba. Laba yang didapat perusahaan berasal dari selisih antara pendapatan dengan biaya. Harga merupakan satu-satunya unsur bauran pemasaran yang memberikan pemasukan pada perusahaan, karena itu merupakan unsur pemasaran yang bersifat fleksibel, artinya dapat diubah dengan cepat. Dalam arti luas terdiri dari semua faktor baik faktor eksternal yang mempengaruhi tingkah laku kelompok penyalur atau faktor lingkungan saluran yang dikelompokkan menjadi empat golongan, yakni lingkungan sosial, perekonomian, pemerintah, dan persaingan. Faktor lingkungan ini akan berpengaruh pada semua aspek manajemen termasuk pendapatan. Linkungan juga mengadakan intraksi dengan pasar dan masing-masing faktor mempengaruhi faktor lingkungan yang lain (Abednego, 2008). Tahap konsumen berada pada tahap proses keputusan untuk membeli dan menggunakan produk atau tidak. Meskipun terdapat interaksi antara pemasar dan pelanggan selama tahap pembelian aktual, tahap pemakaian barang biasa terlepas dari pengaruh langsung dari pemasar. (Pratiwi, 2015).

2.2. Produk Musiman dan Karakteristik Distribusinya

Produk musiman adalah sekumpulan atribut yang nyata dan tidak nyata didalamnya sudah tercakup warna, harga, kemasan yang menarik terutama para produk musima yang memiliki batasan waktu. Perusahaan disini menyesuaikan penawaran (*supply)* mereka untuk memenuhi permintaan (*demand*) konsumen (Dalimunthe, 2009).

Distribusi adalah istilah dalam pemasaran yang menjelaskan bagaimana suatu produk atau jasa dibuat secara fisik tersedia bagi konsumen. Sedangkan sistem distribusi yang yang baik menetukan kelancaran transaksi suatu produk yang memikili batasan waktu, lebih cepat *(perishable*), sehingga cepat rambatnya transaksi sangat menentukan kualitas produk hingga ketangan konsumen. Cepatnya transaksi dipengaruhi oleh banyaknya permintaan (*demand*) yang tergantung pada banyaknya konsumen (Anandhita, 2014). Krakteristik distribusidalam kegiatan distribusi terdapat lima jenis pemetaan diantaranya yaituPemetaan wilayah (*market areas mapping*), Pemetaan kuantitatif (*guantifed mapping*), Pemetaan harga (*price mapping*), Pemitaan kualitas (*quality mapping*) Skema arus barang neaga atau jalur distribusi (*commodity flow chart*) (Anandhita, 2014).

2.3. Analisis Regresi

Analisis regresi adalah analisis yang digunakan untuk menentukan hubungan kausalitas antara variabel prediktor dengan variabel respon. Tujuan dalam analisis regresi adalah mencari bentuk estimasi yang mendekati kurva regresi. Analisis regresi dapat digunakan untuk prediksi. Diberikan data berpasangan(x_i, y_i) persamaan regresi untuk amatan $i = 1,2,3, \dots \dots, n$ yang sesuai dengan data berpasangan tersebut adalah

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon_i;\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad (1)$$

Dengan y_i merupakan respon ke$-i$, $g(x_i)$ sebagai representasi kurva regresi, ε_i adalah *error* random yang diasumsikan identik independen, dan berdistribusi normal dengan mean 0, dan variansi σ^2 (Hardle, 1990).

Ada tiga pendekatan dalam analisis regresi yaitu regresi parametrik, regeresi semiparametrik, dan regresi nonparametrik. Jika dalam analisis regresi bentuk kurva regresi diketahui maka pendekatan model regresi tersebut dinamakan model regresi parametrik. Jika bentuk kurva regresi tidak diketahui bentuk polanya maka digunakan pendekatan regresi nonparametrik. Pendekatan lainnya yaitu regresi semiparametrik yang terdiri atas pendekatan regresi parametrik dan nonparametrik (Mardianto dan Budiantara, 2014).

2.4. Analisis Regresi Nonparametrik

Pola suatu data tidak selamanya dapat diestimasi dengan pendekatan regresi parametrik seperti regresi linear, karena akan menghasilkan *error* dan variansi besar. Maka disarankan untuk menggunakan regresi nonparametrik. Data berpasangan (x_i, y_i), maka bentuk umum regresi nonparametrik untuk amatan $i = 1,2,3, \dots \dots, n$ yang sesuai dengan data tersebut adalah

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i;\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Dengan y_i merupakan respon ke$-i$, $f(x_i)$ merupakan kurva regresi yang didekati dengan fungsi-fungsi dalam regresi nonparametrik seperti kernel, deret Fourier, histogram, wavelet, deret orthogonal, spline, k-NN. Adapun ε_i adalah *error* random yang diasumsikan identik independen, dan berdistribusi normal dengan mean 0, dan variansi σ^2. Tujuan dari proses regresi nonparametrik adalah untuk mengestimasi suatu data respon berdasarkan prediktor secara *smooth* berdasarkan pendekatan fungsi nonparametrik tertentu dengan residual sekecil mungkin (Hardle, 1990). Untuk data penjualan produk musiman, prediktor yang digunakan merupakan barang yang masuk selama tahun 2017, biaya pengiriman dan sebagainya.

2.5. Estimator Deret Fourier Dalam Regresi Nonparametrik

Definisi 1.

Jika diberikan $f(t)$ merupakan suatu fungsi yang dapat diintegralkan dan diferensiable pada interval $[a, a + 2L]$, maka representasi deret Fourier pada interval tersebut yang berkaitan dengan $f(x)$ yang memuat komponen trigonometri sinus dan cosinus adalah sebagai berikut

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos l^* x + b_n \sin l^* x).$$

Selanjutnya diberikan definisi terkait deret cosinus dan deret sinus Fourier

Definisi 2.

Jika $f(x)$ fungsi genap, atau jika $f(-x) = f(x)$, maka koefisien Fourier $b_n = 0$. Dengan demikian deret Fouriernya disebut deret cosinus Fourier. Jika $f(x)$ dapat diintegralkan pada interval $[0, L]$, maka deret cosinus Fouriernya sebagai berikut

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos l^* x$$

(*Suslov, 2003*)

Definisi 3.

Jika $f(x)$ fungsi gasal, atau jika $f(-x) = -f(x)$, maka koefisien Fourier $a_n = 0$. Dengan demikian deret Fouriernya disebut deret sinus Fourier. Jika $f(x)$ dapat diintegralkan pada interval $[0, L]$, maka deret sinus Fouriernya sebagai berikut

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin l^* x$$

(*Suslov, 2003*)

Deret Fourier adalah fungsi polinomial trigonometri yang mempunyai tingkat fleksibelitas tinggi dengan ekspansi ke dalam bentuk deret Fourier, suatu fungsi periodik bisa dinyatakan sebagai jumlahan dari beberapa fungsi harmonis, yaitu fungsi dari sinus dan cosinus, yang termasuk fungsi sinusoidal. Berdasarkan model regresi nonparametrik yang diberikan dipersamaan (2.1), $g(x_i)$ dihampiri oleh fungsi deret Fourier yang digunakan Bilodeau (1992):

$$g(x_i) = \gamma x_i + \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{L} a_l \cos l x_i$$

Sehinggga dari persamaan (2.1) diperoleh

$$y_i = \gamma x_i + \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{l=1}^{L} a_l \cos l x_i + \varepsilon_i; \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan vektor

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}[l]\beta + \varepsilon; \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \qquad (2)$$

dengan

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$$

$$\mathbf{X}[l]\begin{pmatrix} x_{11} & 1 & \cos x_{12} & \cdots & \cos lx_{31} & \cdots & x_{1p} & \cos x_{1p} & \cdots & \cos lx_{1p} \\ x_{21} & 1 & \cos x_{22} & \cdots & \cos lx_{32} & \cdots & x_{2p} & \cos x_{2p} & \cdots & \cos lx_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & 1 & \cos x_{n1} & \cdots & \cos lx_{ni} & \cdots & x_{np} & \cos x_{np} & \cdots & \cos lx_{np} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ y_1 \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{0p} \\ y_p \\ a_{1p} \\ \vdots \\ a_{lp} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$$

Dengan menggunakan metode OLS (*Ordinary Least Square*) maka *error* diminimumka melalui persamaan berikut

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^{k+2}} \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}) = \min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^{k+2}} \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^{k+2}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}[l]\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}[l]\boldsymbol{\beta}) \quad (3)$$

Kemudian diperoleh bentuk persamaan hasil perkalian

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'[l]y + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'[l]\mathbf{X}[l]\boldsymbol{\beta} \quad (4)$$

Jika persamaan (4) diturunkan secara parsial terhadap vektor $\boldsymbol{\beta}$ dan sesuai konsep optimasi dimana hasil turunnya sama dengan nol, dalam hal ini vektor nol, maka diperoleh

$$-2\mathbf{X}'[l]\boldsymbol{y} + 2\mathbf{X}'[l]\mathbf{X}[l]\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad (5)$$

Dari persamaan (5) diperoleh estimator untuk parameter regresi nonparametrik dengan pendekatan deret Fourier sesuai dengan Bilodeau (1992) sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'[l]\mathbf{X}[l])^{-1}\mathbf{X}'[l]\boldsymbol{y} \quad (6)$$

dengan estimator untuk kurva regresinya adalah

$$\hat{y}(x_i) = \hat{\gamma}x_i + \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_l \cos lx_i$$

dengan demikian estimator untuk y_i adalah

$$\hat{y}_i = \hat{\gamma}x_i + \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{l=1}^{L} \hat{a}_l \cos lx_i \quad (7)$$

2.7. Metode PLS

Penalized Least Squares (PLS) adalah fungsi pendugaan yang menggabungkan *goodness offit* dengan kemulusan kurva (*smooth*), yang keduanya dikontrol oleh suatu parameter pemulusan (Tjahjono, 2009). Penduga fungsi pemulus merupakan penduga fungsi yang mampu memetakan data dengan baik serta mempunyai ragam galat yang kecil (Fahrmeir & Tutz, 1994). Oleh karena itu, dengan menggunakan data amatan sebanyak n, maka fungsi *Penalized Least Squares* sebagai berikut

$$PLS = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - g(x_i)\big)^2}_{r} + \underbrace{l\int\Big(g''(x)\Big)^2 dx}_{s} \quad (8)$$

dimana bagian (r) merupakan jumlah kuadrat sisaan atau fungsi jarak antara data dan dugaan, bagian (s) merupakan *roughness* penalti, yaitu ukuran kemulusan kurva dalam memetakan data, dan $0 < l < 1$adalah parameter pemulus, yaitu pengontrol keseimbangan antara kecocokan terhadap data (*goodness offit*) dan kemulusan kurva (penalti). Apabila nilai l besar mendekati 1 maka akan memberikan bobot penalti (kemulusan) yang besar dan mempunyai ragam yang kecil.

2.7. Pemilihan Parameter penghalus Beserta Ukuran Kebaikan Model

Sementara itu untuk kebaikan model regresi nonparametrik dengan pendekatan deret Fourier diukur berdasarkan pemilihan parameter penghalus optimal yang memberikan nilai MSE terkecil. Parameter penghalus optimal dipilih berdasarkan formulasi *Generalized Cross Validation* (GCV). Adapun indikator kebaikan dari model regresi nonparametrik dapat dilihat dari ukuran-ukuran berikut

1. *Mean Square Error* (MSE)

$$MSE[l] = \frac{1}{n}\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}[l])'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}[l])\boldsymbol{y}$$

dimana **I** merupakan matriks identitas dan $\boldsymbol{A}[l]$adalah matriks hat. Model yang baik dapat diukur dari nilai MSE yang kecil (Wahba, 1990).

2. *Generalized Cross Validation* (GCV)

Penentuan l optimal akan menghasilkan nilai R^2 yang tinggi. Nilai dari GCV sebagai berikut:

$$GCV[l] = \frac{MSE(l)}{\big(n^{-1}trace(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}l)\big)^2}$$

Nilai GCV terkecil akan menghasilkan *l* yang optimal.

3. Koefisien Determinasi (R^2)

Koefisien Determinasi atau R^2 merupakan ukuran kontribusi variabel-variabel prediktor terhadap variabel respon. Adapun Rumus koefisien determinasi adalah

$$R^2 = \frac{(\hat{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{y}})^T(\hat{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{y}})}{(\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}})^T(\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}})}$$

Dimana $\bar{\boldsymbol{y}}$ merupakan vektor yang memuat rata rata data respon. Model yang baik dapat diukur dari nilai R^2 yang besar *(Mardianto, et al., 2017)*

3. METODE PENELITIAN

1. Pencarian Data

Penelitian ini meggunakan data sekunder yang diperoleh dari Toko Swalayan Kopontren A-Iktisab Kacok Palengaan, Kecamatan Palengaan, Kebupaten Pamekasan Tahun 2017 tentang barang musiman, memilih daerah ini karena tempat ini merupan salah satu sentra belanja para masyarakat sekitar. Penelitian ini dilakukan dari Bulan Desember 2016 sampai November 2017

2. Penentuan Variabel Penelitian

Pada penelitian ini, variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian ini ada dua yaitu variabel respon (y) dimana variabel responnya adalah barang yang masuk ke Toko selama Tahun 2017 dan variabel prediktor (x) merupakan variabel yang diduga berpengaruh terhadap penjualan produk musiman di Toko. Berikut adalah uraian variabel yang digunakan:

Y: Persentase Jumlah barang yang terjual per unit
X_1: Persentase Barang yang masuk per unir
X_2: Persentase laba
X_3: Persentase produk cacat

3. Langkah Analisis

Analisis deskriptif dilakukan dengan tujuan untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi angka penjualan produk musiman di Pamekasan. Secara umum langkah-langkah analis yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji estimasi kurva regresi nonparametrik dengan pendekatan deret Fourier dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a) Mengasumsikan variabel independen dengan distribusi yang akan digunakan untuk menentukan estimasi parameter regresi nonparametrik dengan pendekatan deret Fourier
   b) Diberikan model regresi nonparametrik
   c) Mendekati komponen nonparametrik dengan fungsi deret Fourier dengan basi sinus, cosinus, dan sinus dan cosinus
   d) Memperoreh estimasi deret Fourier dalam regresi nonparametrik dengan penalti sebagai berikut:

$$PLS = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - g(x_i)\right)^2}_{r} + \underbrace{l \int \left(g''(x)\right)^2 dx}_{s}$$

2. Merancang algoritma pada program R untuk aplikasi data
3. Penerapan model Regresi Nonparametrik dengan Penalti dengan pendekatan Deret Fourier untuk momudelkan data tingkat penjualan produk musiman dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a) Membuat statistika deskriptif variabel dependent dalam hal ini jumlah barang masuk dan variabel independennya
   b) Membuat *scatter plot* antara jumlah barang yang masuk dengan variabel predictor yang dijadikan deteksi awal pola hubungan anatar variabel respon terhadap variabel predictor
   c) Memodelkan nilai jumlah barang yang masuk dengan variabel –variabel prediktornya dengan regresi nonparametrik
   d) Memilih parameter penghalus optimal berdasarkan GCV terkecil minimal dari setiap parameter penghalus, kemudian memilih nilai GCV, MSE yang kecil dan R^2 yang besar.
   e) Memodelkan jumlah barang yang masuk dengan variabel-variabel prediktornya dengan regresi nonparametrik dengan parameter penghalus optimal
4. Menginterpretasikan hasil analisi mengambil kesimpulan.

4. HASIL PENELITIAN

4.1 Estimasi Deret Fourier dengan Basis Sinus dan Cosinus serta Estimasi Deret Fourier Sinus dalam Regresi Nonparametrik Terpenalti

Deret Fourier merupakan fungsi polinomial dengan basis fungsi cosinus atau sinus yang mempunyai fleksibilitas, sehingga dapat menyesuaikan secara efektif terhadap sifat lokal data. Deret Fourier baik digunakan untuk menjelaskan kurva yang bersifat periodik seperti gelombang sinus dan cosinus. Misalkan diberikan pasangan data $(x_i, y_i), i = 1,2, \dots, n$, dan hubungan antara x_i dan y_i diasumsikan mengikuti model regresi :

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \tag{9}$$

dengan g merupakan kurva regresi yang diasumsikan termuat dalam ruang $C(0,\pi)$, ε_i adalah *error* random yang diasumsikan independen dan berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi σ^2. Dalam analisis regresi untuk mengestimasi kurva regresi g digunakan suatu penalti untuk memperoleh ukuran kemulusan atau kekasaran fungsi g sebagai berikut:

$$\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \left(g^{(2)}(x)\right)^2 dx \tag{10}$$

Dengan demikian estimator untuk kurva regresi g dapat diperoleh dari menyelesaikan optimasi *Penalized Least Square* (PLS):

$$\underset{g \epsilon C(0,\pi)}{Min} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^{n} w_i \left(y_i - g(x_i)\right)^2 \right\} + l \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \left(g^{(2)}(x)\right)^2 dx \tag{11}$$

Dengan l merupakan parameter penghalus yang mengontrol antara *goodnes of fit* dan kemulusan fungsi, dan $g^{(2)}(x)$ merupakan turunan kedua dari $g(x)$. Untuk l yang sangat besar akan diperoleh fungsi penyelesaian yang sangat mulus, sedangkan untuk l yang sangat kecil akan diperoleh fungsi penyelesaian yang sangat kasar. Oleh karena g mereupakan fungsi yang kontinu maka g dapat dihampiri dengan fungsi T. Pembahsan ini ditekankan pada estimasi deret Fourier dengan basis sinus dan cosinus serta estimasi deret Fourier sinus dalam regresi nonparametrik terpenalti karena belum ada penelitian yang mengkaji estimator-estimator tersebut.

4.1.1 Estimasi Deret Fourier Sinus dalam Regresi Nonparametrik Terpenalti

Kurva regresi nonparametrik yang dihampiri oleh deret Fourier dengan basis sinus adalah sebagai berikut:

$$T = \gamma x_i + \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{L} a_l \sin lx \tag{12}$$

Dari persamaan 12 diperoleh estimator untuk kurva regresi T yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{y}}_i = \sum_{i=j}^{q}\left(\hat{\gamma}x_{ij} + \frac{\hat{a}_{0i}}{2} + \sum_{l=1}^{L}\hat{a}_{lj}\sin lx_{ij}\right)$$

4.1.2 Estimasi Deret Fourier dengan Basis Cosinus dan Sinus dalam Regresi Nonparametrik Terpenalti

Kurva regresi nonparametrik yang dihampiri oleh deret Fourier dengan basis cosinus dan sinus adalah sebagai berikut

$$T = \gamma x + \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{L} a_l \cos lx + \sum_{l=1}^{L} b_l \sin lx \qquad (13)$$

Penyelesaian dari persamaan 13 maka di peroleh estimator g sebagai berikut:

$$\hat{y}_i = \sum_{i=j}^{q}\left(\hat{\gamma}x_{ij} + \frac{\hat{a}_{0i}}{2} + \sum_{l=1}^{L}\left(\hat{a}_{lj} cos lx_{ij} \hat{b}_{lj} sin lx_{ij}\right)\right) \qquad (14)$$

4.2 Deskriptif Data untuk Memprediksi Tingkat Penjualan Produk Musiman di Pamekasan Tahun 2017

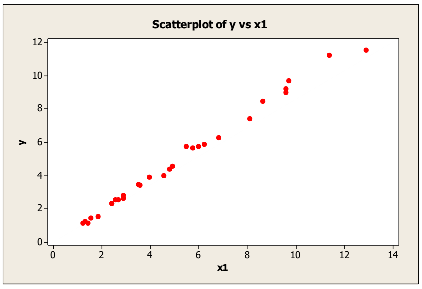
Unit observasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah 30 produk musiman yang diambil dari toko Al-Ikhtisab yang merupakan salah satu toko swalayan di Kabupaten Pamekasan. Variabel yang digunakan adalah empat variabel, satu variabel respon dan tiga variabel prediktor. Variabel respon yang digunakan adalah jumlah barang yang masuk ke toko, variabel prediktornya adalah jumlah barang yang terjual, presentase laba, presentase produk cacat.

Tahap awal sebelum melakukan pemodelan regresi dalam hal ini memodelkan kasus angka penjualan produk musiman di salah satu toko swalayan di Pamekasan adalah untuk mengetahui bentuk pola hubungan antara variabel respon dengan setiap variabel prediktor. Mengenai bentuk pola hubungan tersebut digunakan untuk menentukan jenis kurva regresi yang sesuai dalam menghampiri pola data. Bentuk pola hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor dapat diperoleh dari sebaran data yang disajikan dalam bentuk tabel dan *scatter plot.*

Tabel 1. Statistik Deskriptif Data

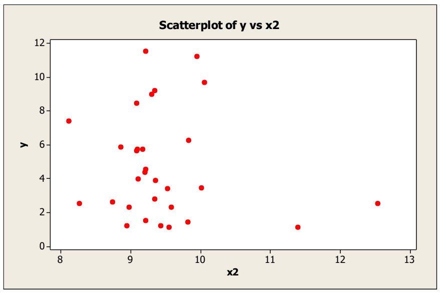
Var	**N. Min**	**Nama. Barang**	**N. Mak**	**Nama. Barang**	**Rata2**
Y	1.11	Sari Gandum 240g	11.5	Goodbis Kacang	4.97 %
x1	1.23	Sari Gandum 240g	12.9	Goodbis Kacang	5.00 %
x2	8.11	Peci Rahmat AC	12.5	Butter Coconut	9.44 %
x3	0.3	Kanguru Mari	2.02	Kukis White Coffee	0.93 %

Hasil *scatter plot* untuk variabel respon (barang yang masuk ke toko) terhadap variabel prediktor (barang yang terjual) adalah sebagai berikut:



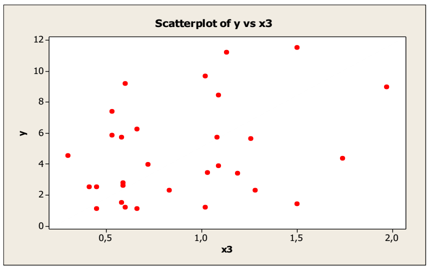
Gambar 1. *Scatter Plot* Antara Jumlah Barang yang Masuk ke Toko dengan Barang yang Terjual

Gambar 1 menggambarkan pola hubungan antara jumlah barang yang masuk ke toko dengan barang yang terjual. Pola hubungan yang terbentuk antar variabel tersebut yakni membentuk hubungan linier positif. Terlihat dari pergerakan plot secara umum yakni semakin rendah angka penjualan maka semakin tinggi angka barang yang masuk ke toko. Begitu pula sebaliknya, semakin tinggi angka penjualan maka barang yang masuk cenderung rendah.



Gambar 2. *Scatter Plot* Antara Jumlah Barang yang Masuk dengan Persentase Laba

Gambar 2 menunjukkan bahwa bentuk pola hubungan antar variabel respon jumlah barang yang masuk (y) dan variabel prediktor persentase laba (x_2) cenderung tidak mengikuti bentuk pola, sehingga dapat dimodelkan secara nonparametrik. Bentuk pola hubungan cenderung mengalami perubahan perilaku pola data yang berulang, sehingga dimodelkan dengan fungsi deret Fourier.



Gambar 3. *Scatter Plot* Antara Barang yang Masuk dengan Persentase Produk Cacat

Gambar 3 menunjukkan bahwa bentuk pola hubungan anatar variabel respon barang yang masuk dengan variabel prediktor persentase produk cacat tidak diketahui bentuk pola hubungannya, sehingga dapat dimodelkan secara nonparametrik. Bentuk pola hubungan antara variabel-variabel tersebut cenderung mengalami perubahan perilaku pola data yang berulang, sehingga dapat dimodelkan dengan fungsi deret Fourier.

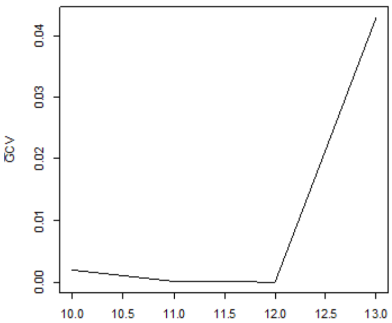
4.3 Estimator Deret Fourier dalam Regresi Nonparametrik dengan Parameter Penalti untuk menetukan kebaikan model

Pendekatan regresi nonparametrik dengan estimator deret Fourier memiliki parameter penghalus (l). Metode GCV digunakan untuk menentukan nilai l optimum. Hasil perhitungan GCV optimal menggunakan *software* R disajikan sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai GCV dengan Basis Cosinus

l	Nilai GCV
10	1,889
11	3,669
12	1,180
13	4,297

Berdasarkan Tabel 2 nilai GCV Minimum adalah 1,180 dengan l sebesar 12. menunjukkan perubahan GCV untuk $l = 10$ sampai $l = 13$



Gambar 4. Perubahan Nilai GCV dengan Basis Cosinus

Berdasarkan nilai parameter penghalus (l) yang optimum yaitu sebesar 12, diperoleh model estimator deret Fourier.Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan *software* R, nilai parameter dalam model dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y}_i = {} & -1.747x_{i1} + 5.373 - 1.045\cos x_{i1} + \\ & 1.975\cos 2\,x_{i1} - 4.413\cos 3\,x_{i1} + \\ & 1.050\cos 4\,x_{i1} + 9.454\cos 5\,x_{i1} + \\ & 3.098\cos 6\,x_{i1} - 5.528\cos 7\,x_{i1} - \\ & 6.315\cos 8\,x_{i1} + 1.863\cos 9\,x_{i1} + \\ & 1.637\cos 10\,x_{i1} - 6.037\cos 11\,x_{i1} + \\ & 1.049\cos 12\,x_{i1} + 2.213x_{i2} - \\ & 3.683\cos x_{i2} - 5.005\cos 2\,x_{i2} + \\ & 5.837\cos 3\,x_{i2} - 1.919\cos 4\,x_{i2} - \\ & 6.472\cos 5\,x_{i2} - 2.549\cos 6\,x_{i2} - \\ & 8.871\cos 7\,x_{i2} + 3.888\cos 8\,x_{i2} - \\ & 3.526\cos 9\,x_{i2} - 8.399\cos 10\,x_{i2} + \\ & 5.779\cos 11\,x_{i2} + 6.207\cos 12\,x_{i2} + \\ & 1.74337x_{i3} - 5.901\cos x_{i3} - \\ & 2.641\cos 2\,x_{i3} - 3.855\cos 3\,x_{i3} - \\ & 1.946\cos 4\,x_{i3} - 1.852\cos 5\,x_{i3} - \\ & 2.020\cos 6\,x_{i3} - 2.653\cos 7\,x_{i3} - \\ & 2.6583\cos 8\,x_{i3} - 1.754\cos 9\,x_{i3} - \\ & 1.518\cos 10\,x_{i3} - 9.453\cos 11\,x_{i3} - \\ & 1.643\cos 12\,x_{i3}\end{aligned}$$

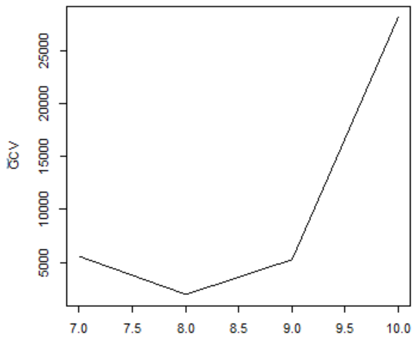
Model ini memiliki kriteria kebaikan dengan nilai l sama dengan 12, GCV sama dengan 1,180 MSE sama dengan 0,4169762, dan R^2 sama dengan 1,02401. Jadi, model telah memenuhi kriteria kebaikan model.

Hasil dari perhitungan GCV optimal l menggunakan *software* R dengan basis sinus

Tabel 3. Nilai GCV dengan Basis Sinus

l	Nilai GCV
7	5,573,369
8	2,008,881
9	5,287,064
10	28,112,954

Berdasarkan tabel 3. nilai GCV Minimum adalah 2008,881 dengan l sebesar 8. menunjukkan perubahan GCV untuk $l = 7$ sampai $l = 10$



Gambar 5. Perubahan Nilai GCV dengan Basis Sinus

Berdasarkan nilai parameter penghalus (l) yang optimum yaitu sebesar 8, diperoleh model estimator deret Fourier dalam regresi nonparametrik sebagai berikut:

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{q}\left(\hat{\gamma}x_{ij} + \frac{\hat{a}_{0i}}{2} + \sum_{l=1}^{L}\hat{a}_{lj}\sin l\, x_{ij}\right)$$

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan *software* R, nilai parameter dalam model dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y}_i = &-1.599x_{i1} + 9.494 + 1.851\sin x_{i1} - \\ &9.168\sin 2x_{i1} + 6.707\sin 3x_{i1} + \\ &-2.382\sin 4x_{i1} + 4.167\sin 5x_{i1} - \\ &3.684\sin 6x_{i1} - 2.972\sin 7x_{i1} + \\ &8.677\sin 8x_{i1} + 1.696x_{i2} + \\ &1.155\sin x_{i2} + 1.527\sin 2x_{i2} + \\ &1.569\sin 3x_{i2} + 1.235\sin 4x_{i2} + \\ &7.325\sin 5x_{i2} + 3.115\sin 6x_{i2} + \\ &8.497\sin 7x_{i2} + 1.120\sin 8x_{i2} + \\ &4.064x_{i3} - 7.666\sin x_{i3} + \\ &3.223\sin 2x_{i3} - 1.592\sin 3x_{i3} + \\ &7.753\sin 4x_{i3} - 3.421\sin 5x_{i3} + \\ &1.302\sin 6x_{i3} - 3.807\sin 7x_{i3} + \\ &7.587\sin 8x_{i3}\end{aligned}$$

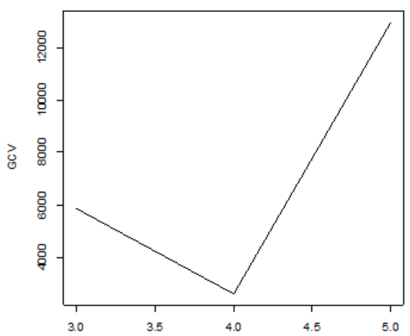
Model ini memiliki kriteria kebaikan dengan nilai l sama dengan 8, GCV sama dengan 2008,881 MSE sama dengan 1,942018, dan R^2 sama dengan 0,9654357. Jadi, model telah memenuhi kriteria kebaikan model.

Hasil dari perhitungan GCV optimal l menggunakan *software* R dengan basis cosinus dan sinus

Tabel 4. Nilai GCV dengan Basis sinus dan cosinus

l	Nilai GCV
3	5,881,235
4	2,613,363
5	12,975,743

Berdasarkan tabel 4. nilai GCV Minimum adalah 2.032164 dengan l sebesar 4. menunjukkan perubahan GCV untuk $l = 3$ sampai $l = 5$



Gambar 6**.** Perubahan Nilai GCV dengan Basis Cosinus dan Sinus

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{q}\left(\hat{\gamma}x_{ij} + \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{l=1}^{L}\left(\hat{a}_{lj}cos l x_{ij} + \hat{b}_{lj}sin l x_{ij}\right)\right)$$

Berdasarkan nilai parameter penghalus (l) yang optimum yaitu sebesar 4, diperoleh model estimator deret Fourier dalam regresi nonparametrik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y}_i = &-2.712x_{i1} + 9.524 - 2.688\cos x_{i1} - \\ &2.204\cos 2x_{i1} - 1.288\cos 3x_{i1} + \\ &6.347\cos 4x_{i1} + 6.177\sin x_{i1} - \\ &5.365\sin 2x_{i1} - 1.111\sin 3x_{i1} + \\ &7.1759\sin 4x_{i1} + 4.844x_{i2} - \\ &5.479\cos x_{i2} - 1.836\cos 2x_{i2} + \\ &8.380\cos 3x_{i2} + 1.434\cos 4x_{i2} - \\ &4.014\sin x_{i2} - 3.679\sin 2x_{i2} + \\ &3.165\sin 3x_{i2} + 3.954\sin 4x_{i2} + \\ &2.010x_{i3} + 3.211\cos x_{i3} - \\ &1.476\cos 2x_{i3} - 8.065\cos 3x_{i3} + \\ &1.336\cos 4x_{i3} - 4.262\sin x_{i3} + \\ &1.901\sin 2x_{i3} - 7.960\sin 3x_{i3} + \\ &1.286\sin 4x_{i3}\end{aligned}$$

Model ini memiliki kriteria kebaikan dengan nilai l sama dengan 4, GCV sama dengan 2.032164 MSE sama dengan 2613.363, dan R^2 sama dengan 0.9670009. Jadi, model telah memenuhi kriteria kebaikan model.

Tabel 5. Perbandingan Sinus, Cosinus, Sinus dan Cosinus

Basis	l Opti-mal	MSE	GCV	R^2
Cosinus	12	0.41698	1.18	100%
Sinus	8	1.94202	2008.881	96%
Cosinus dan sinus	4	2613.36	2.032164	96%

Berdasarkan Tabel 5, terlihat bahwa Cosinus merupakan model yang baik dengan nilai GCV sebesar 1.180, MSE sebesar 0.4169762, dan R^2 sebesar 100%, dimana model dikatakan baik jika nilai GCV dan MSE kecil sedangkan R^2 tinggi.

4.4 Memprediksi Angka Penjualan Produk Musiman di Pamekasan Tahun 2017

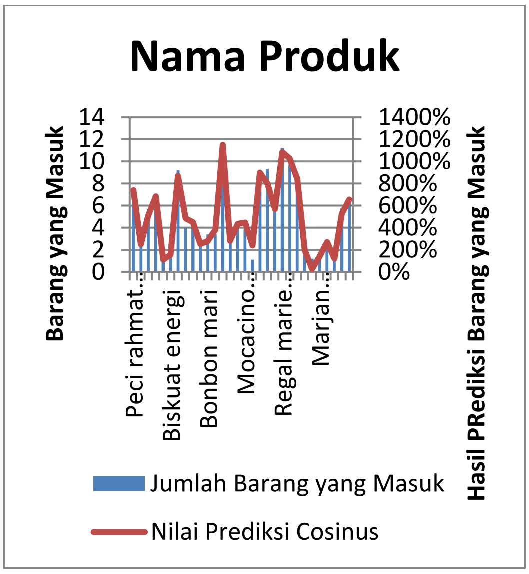
Dilihat dari model regresi nonparametrik dengan pendekatan deret Fourier dan menggunakan *software* R diperoleh hasil prediksi untuk angka penjualan produk musiman di Pamekasan Tahun 2017 sebagai berikut:

ISSN: 2459-9948
e-ISSN: 2579-5864

Tabel 6. Perbandingan Antara Prediksi Barang yang Masuk pada Tahun 2017 Berdasarkan Model dengan Basis Cosinus

Nama Barang	Jumlah yang Masuk	Nilai Prediksi Cosinus
Peci Rahmat AC	7.39	7.3902474
Lamiri kembang	2.5	2.4999401
Okebis 205g	5.73	5.1006409
Coco Puff	5.86	6.8413895
Sari Gandum 240g	1.11	1.1101182
Biskuat Energy	2.77	1.5543579
Wonderland Mari	9.2	8.7185312
Hatari Vanila	3.99	4.852907
Kanguru Mari	4.53	4.5084255
Butter Coconut	2.53	2.530185
Bonbon Mari	3.41	2.7885256
Kelapa Muda	3.44	3.8295628
Goodbis Kacang	11.53	11.5146115
Kedelai Mitra	2.61	2.8396593
Peanut Cream	4.36	4.3706315
Mocacino Mari	3.88	4.4850017
Lavero Coklat MR	1.12	2.3991848
Columbia coklat	9	8.9947373
Monde butter cookies	9.32	7.9909835
Biskuit khong guan	5.65	5.7021254
Regal marie biskuit	11.23	10.8388861
Nissin chocolate wafer	9.68	10.2757255
Roma kelapa	8.48	8.4328218
Biskuit gula	1.51	1.9979253
Abc syrup 585ml	1.21	0.2743443
Marjan boudoin 600ml	1.41	1.3679851
Cocopandan 750ml	2.32	2.7228774
Kukis White Coffee	1.21	1.2126669
Malkist roma	5.75	5.2775772
Biscuits chocolate	6.26	6.5639549

Berdasarkan Tabel 6 nilai barang yang masuk dan hasil prediksinya sedikit yang mengalami perubahan dan ada tetap, hal ini menunjukkan bahwa data tersebut *smoot* dan tidak ada perubahan yang signifikan dan memiliki kriteria model yang baik. Untuk memudahkan dalam menginterpolasi hasil prediksi berdasarkan model regresi nonparametrik dengan pendekatan deret Fourier dengan basis cosinus, berikut disajikan hasil prediksi jumlah barang yang masuk.



Gambar 7. Jumlah Barang yang Masuk Tahun 2017 dengan Hasil Prediksi Barang yang Masuk.

Berdasarkan Gambar 7 perubahan antara jumlah barang dengan nilai prediksi mengalami sedikit pergeseran dan ada yang tetap. Perubahan yang terjadi mengalami perubahan yang tidak signifikan dan di sebut dengan *smoot.*

5. KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan di atas dapat disimpulkan

1. Estimator Deret Fourier dalam Regresi Nonparametrik dengan Parameter Penalti untuk menetukan kebaikan model

   Berdasarkan pendekatan regresi nonparametrik dengan estimator deret Fourier dengan basis antara cosinus, sinus, cosinus dan sinu didapat nilai terbaik yaitu pada berdasarkan Tabel 5, terlihat bahwa Cosinus merupakan model yang baik dengan nilai GCV sebesar 1.180, MSE sebesar 0.4169762, dan R^2 sebesar 100%, dimana model dikatakan baik jika nilai GCV dan MSE kecil sedangkan R^2 tinggi.
2. Memprediksi Angka Penjualan Produk Musiman di Pamekasan Tahun 2017 dengan menggunakan metode regresi nonparametrik dengan parameter penalti dengan pendekatan deret Fourier.

   Dilihat dari model regresi nonparametrik dengan pendekatan deret Fourier dan menggunakan *software* R diperoleh hasil prediksi untuk angka penjualan produk musiman di Pamekasan Tahun 2017. Berdasarkan Tabel 6 nilai barang yang masuk dan hasil prediksinya sedikit mengalami perubahan, hal ini menunjukkan bahwa tidak adanya perubahan yang signifikan dan memiliki kriteria model yang baik atau disebut *smoot.*

DAFTAR PUSTAKA

Abednego. (2008). Analisis Pengaruh Saluran Pemasaran dan Harga terhadap Pendapatan Petani Jeruk Manis di Daerah Sukanalu Kecamatan Barusjahe Kabupaten Karo.

Anandhita, C. N. (2014). Perbandingan Karakteristik Distribusi Hasil Tangkapan Antara PPS Nizam Zachman dengan PPI Muara Angke.

Ayu, D., Saepudin, D., & Umbara, R. F. (2015). Pendekatan Fungsi Penalti untuk Suku Residual Alpha pada Pembentukan Portofolio Saham. *2* (3).

Dalimunthe, A. T. (2009). Analisis Penjualan Film dan Kamera Digital di PT Modern Photo TBK Medan pada Juli Sampai dengan Desember 2008.

Mardianto, M. F. (2017). Kumpulan Karya Ilmiyah dalam Bentuk Artikel sebagai Bahan Penilaian Mata Kuliah Regresi Nonparametrik dan Literature Review.

Mardianto, M. F., Kartiko, S. H., & Utami, H. (2017). Peramalan Data dengan Nonparametrik Tren Musiman Menggunakan Pendekatan Fungsi Kernel dan Deret Fourier. *jurnal*.

Nurjanah, F., Utami, T. W., & Nur, I. M. (2015). Model Regresi Nonparametrik dengan Pendekatan Deret Fourier pada Data

Suslov, S. K. (2003). *An Introduction To Basic Fourier Series.* Springer Science, Arizona.

Tjahjono, E. (2009). *Estimator Deret Fourier Terbobot pada Regresi Nonparametrik.* Surabaya: Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember.